Enoncés des CAPES externes de 1971 à 1980

Avec les corrections des compositions 2 des CAPES 1976 & 1979

Collectionnés et présentés par Dany-Jack Mercier
(1 mai 2019)

megamathsblog.blogspot.com/
facebook.com/avantimegamaths
amzn.to/2ZQA6CQ

Remarque : Si le second membre est de la forme $\mathcal{P}_m(x)\cos\alpha x$, on décompose $\cos\alpha x$ en $\dfrac{e^{i\alpha x}+e^{-i\alpha x}}{2}$ et on cherche une solution y_o^1 correspondant à $\frac{1}{2}\mathcal{P}_m e^{i\alpha x}$ et une solution y_o^2 (en faisant $i/_{-i}$ dans y_o^1).
La solution y_o est alors (grâce à la linéarité de l'équation)
$y_o = y_o^1 + y_o^2$.

1971

ÉNONCÉ

Les polynômes du problème sont à une indéterminée X et leurs coefficients appartiennent à C (corps des complexes). Un polynôme est dit *normalisé* si le coefficient de son monôme de plus haut degré est 1.

I

1° Un polynôme Q normalisé de degré 2, défini par :

$$Q(X) = X^2 + pX + q$$

a pour zéros, distincts ou non, a et b.

Calculer $a^2 + b^2$ et $(ab)^2$ en fonction de p et q. Déterminer p et q de façon que le polynôme normalisé de degré 2 dont les zéros sont a^2 et b^2 soit identique à Q.

2° On considère un polynôme A normalisé de degré 2, de zéros distincts ou non a et b :

$$A(X) = (X - a)(X - b)$$

Déterminer a et b pour que A(X) divise A(X^2). Donner la liste des polynômes A vérifiant cette condition.

3° On considère un polynôme B normalisé de degré 2, de zéros distincts ou non a et b :

$$B(X) = (X - a)(X - b)$$

Déterminer a et b pour que B(X) divise B(X^3). Donner la liste des polynômes B vérifiant cette condition; on démontrera que si B(X) est un de ces polynômes, B(— X) est aussi un de ces polynômes.

4° Un polynôme P normalisé de degré 3, défini par :

$$P(X) = X^3 + pX^2 + qX + r$$

a pour zéros, distincts ou non, a, b, c.

a. Calculer $a^2 + b^2 + c^2$ et $(bc)^2 + (ca)^2 + (ab)^2$ en fonction des coefficients p, q, r.

Déterminer p, q, r de façon que le polynôme normalisé de degré 3 dont les zéros sont a^2, b^2, c^2 soit identique à P.

On donnera la liste de ces polynômes P et on démontrera que, pour chacun d'eux :

$$P(X^2) = - P(X) \cdot P(-X)$$

b. Parmi les polynômes P obtenus à la question 4°, *a.* précédente, deux seulement, F_1 et F_2, ont certains de leurs coefficients qui ne sont pas réels.

Calculer le produit $F_1(X) \cdot F_2(X)$.

Donner, sous forme trigonométrique, les zéros de chacun des polynômes F_1 et F_2.

5° On rappelle que, pour le nombre complexe $z = x + iy$ où x et y sont réels et où $i^2 = -1$, x (resp. y) s'appelle la partie réelle (resp. la partie imaginaire).

a. Former les polynômes normalisés de degré 3 ayant pour zéros les parties réelles des zéros des polynômes F_1 et F_2.

b. Former les polynômes normalisés ψ_1 et ψ_2 de degré 3 ayant pour zéros les parties imaginaires des zéros des polynômes F_1 et F_2.

Former les polynômes g et h tels que :

$$g(X) = - 64\, \psi_1(X)\, \psi_2(X)$$
$$h(X) = - X g(X)$$

Établir, dans l'ordre qu'on voudra, les relations :

$$\sin 7\theta = \sin \theta\, g(\sin \theta)$$
$$\cos 7\theta = h(\cos \theta)$$
$$\text{ch}\ 7\theta = h(\text{ch}\ \theta)$$

II

1° *a.* Le plan orienté étant rapporté à l'axe polaire Ox, θ et ρ désignent respectivement un angle polaire et le rayon vecteur d'un point du plan. Construire la courbe L représentée par l'équation :

$$\rho = g(\sin \theta)$$

g étant le polynôme défini à la question I, 5°, *b.*

On prendra une unité graphique égale à un centimètre. Le dessin sera facilité par la recherche des points où la tangente est parallèle à l'axe polaire et par le calcul, à l'aide de tables, de valeurs approchées des abscisses de ces points.

b. Soit

$$I_m = \int_0^{\pi} \frac{\sin (2m + 1)\theta}{\sin \theta}\, d\theta\ ,$$

m étant un entier naturel.

Calculer I_m en utilisant une formule de récurrence. A l'aide du résultat obtenu, calculer :

$$J_m = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 (2m + 1)\theta}{\sin^2 \theta}\, d\theta\ .$$

En déduire l'aire totale du domaine limité par les diverses boucles de L.

2° Une relation $\mathcal{S}$ est définie dans le corps des réels en posant $x \mathcal{S} y$ si et seulement si $h(x) = h(y)$, h étant le polynôme défini à la question I, 5°, *b.*

a. Démontrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence.

On suppose x donné, $|x| > 1$: comment est constituée la classe d'équivalence de x ?

On suppose x donné, $|x| \leqslant 1$: déterminer les nombres y qui constituent la classe de x et exprimer ces nombres en fonction de x ; combien existe-t-il en général d'éléments dans une classe ? Quelles sont les valeurs de x pour lesquelles il y a exception ? Dans chacun de ces cas particuliers, donner les éléments constituant la classe d'équivalence.

b. En utilisant les résultats précédents, on demande de construire la représentation graphique de l'ensemble Γ des points (x, y) du plan tels que $h(x) = h(y)$.

On prendra un repère orthonormé tel que l'unité graphique soit égale à 5 centimètres.

On établira que Γ est la réunion d'une droite Δ et de trois ellipses E_j $(j = 1, 2, 3)$. On précisera les éléments de symétrie de Γ et les points communs à deux quelconques des sous-ensembles Δ, E_1, E_2, E_3.

c. On démontrera que Δ, E_1, E_2, E_3 sont des courbes intégrales de l'équation différentielle :

$$(1 - x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 - y^2$$

Quelle conséquence géométrique peut-on en déduire relativement aux tangentes en un de leurs points communs à deux des courbes Δ, E_1, E_2, E_3?

d. Évaluer l'aire du domaine D_j intérieur à l'ellipse E_j. Évaluer l'aire de la partie commune à deux quelconques des domaines D_j.

Capes 1971, épreuve II

Ce travail fait à partir d'une photocopie peut présenter quelques erreurs, me les signaler à l'adresse suivante :
jeaneric.richard(a)wanadoo.fr (changer (a) en @). Bon courage ! Version du 18 janvier 2009 à 15h46.

Partie I.

1. On convient d'appeler Δ l'ensemble des déplacements (isométries positives) d'un espace affine euclidien $\mathscr{E}$, de dimension 3, laissant globalement invariant un cône de révolution Γ, de sommet O, d'axe γ et de demi-angle au sommet θ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$.

   Démontrer que Δ a un structure de groupe relativement à la compositions des transformations.

2. On désigne par Δ' le sous-ensemble de Δ constitué des demi-tours (ou symétries axiales). Démontrer que chacun des ces demi-tours commutent avec au moins deux autres convenablement choisis et que tout élément de Δ s'écrit comme composé de deux éléments de Δ'.

3. Que deviennent les résultats des paragraphes (1) et (2) si l'on remplace le cône Γ par un cylindre de révolution Σ d'axe γ ?

4. On désigne par G l'ensemble des génératrices du cône Γ et par d_0 un élément fixé de G. Dans G on définit une loi de composition ⋆ de la manière suivante :

   Étant donné deux éléments d_1 et d_2 de G, le plan $(d_1,\ d_2)$ coupe le plan perpendiculaire en O à l'axe γ de Γ suivant une droite δ. Le plan $(d_0,\ \delta$ recoupe en général Γ suivant une droite d. On pose alors :

   $$d = d_1 \star d_2.$$

   Si $d_1 = d_2$, le plan $(d_1,\ d_2)$ est le plan tangent à Γ le long de d_1 ; si le plan $(d_0,\ \delta)$ est tangent à Γ, on prend $d = d_0$.

   Démontrer que (G, ⋆) est un groupe abélien, c'set à dire commutatif.

5. Soit Π un plan ne passant pas par O. On note G' le sous-ensemble de G constitué par des droites non parallèles à Π et E l'ensemble des points communs au cône Γ et au plan Π : $E=\Pi\cap\Gamma$. On désigne par φ l'application de G' vers E telle que $\varphi(d) = d\cap\Pi$ pour toute droite d de G'. Démontrer que φ est une bijection.

   On note $\mathscr{T}$ l'opération, dans $\mathscr{E}$, induite de ⋆ par φ c'est-à-dire l'opération qui, à $a_1 = \varphi(d_1)$ et $a_2 = \varphi(d_2)$ associe, quand c'est possible,

   $$a = a_1 \mathscr{T} a_2 = \varphi(d_1 \star d_2).$$

   Démontrer que les droites a_1a_2 et a_0a $(a_0 = \varphi(d_0))$, lorsqu'elles sont sécantes, se coupent en un point situé sur une droite fixe indépendante de a_1 et a_2 et que cette droite est la directrice associée au foyer O de la projection orthogonale de E sur le plan perpendiculaire en O à γ.

   (Examiner le cas particulier où Π est perpendiculaire à l'axe γ.) (E, $\mathscr{T}$) est-il un groupe abélien ?

Partie II.

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté au repère d'origine O et de base orthonormée $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$? Au point m de coordonnées $(a\ ;\ b\ ;\ c)$, on fait correspondre le polynôme en x :

$$f_m(x) = ax^2 + \sqrt{2}bx + c.$$

Les racines de $f_m(x)$ qui interviennent dans la suite appartiennent au corps des complexes.

1. Quel est le lieu des points m dans chacun des cas suivants :
   a) $af_m(x)$ et $f'_m(x)$ dérivée de $f_m(x)$ par rapport à x, ont le même ensemble de racines. (Il pourra être commode de calculer le produit scalaire $\overrightarrow{OM}.\vec{u}$ où $\vec{u} = \vec{i} + \vec{k}$). On désignera par S ce lieu et on démontrera que S est un cône de révolution dont on précisera le sommet, l'axe et le demi-angle au sommet.
   b) $af_m(x)$ n'a aucune racine réelle.
   c) $f_m(x)$ a deux racines réelles distinctes.
2. a) Quel est le lieu des points m tels que l'on ait $f_m(\lambda) = 0$ où λ est un nombre réel ou complexe donné (distinguer les deux cas) ? Dans le cas où λ est réel, situer géométriquement ce lieu par rapport à S.
   b) En désignant par $f_m^{-1}(0)$ l'ensemble des racines de $f_m(x)$, déterminer le lieu des points m,
      i. lorsque $f_m^{-1}(0) = \{\alpha\}$ où α est un réel donné,
      ii. lorsque $f_m^{-1}(0) = \{\alpha,\ \beta\}$ où α et β sont deux nombres réels ou complexes donnés.
3. Soit P l'ensemble des points d'intersection de S avec le plan d'équation $a = 1$. Démontrer que l'application de P vers $\mathbb{R}$ (ensemble des réels) qui, à tout point $m(1\ ;\ b\ ;\ c)$ de P associe la racine α de $f_m(x)$ est une bijection. On désigne par h l'application réciproque de cette bijection. Donner une définition purement géométrique de la loi de groupe $\circ$ sur P, induite par h de l'addition des réels, c'est à dire :

$$m_1 \circ m_2 = h(\alpha_1 + \alpha_2) \text{ si } m_1 = h(\alpha_1) \text{ et } m_2 = h(\alpha_2).$$

4. Dans cette question, a ne garde plus comme au (3) la seule valeur 1 mais on suppose que a est un réel quelconque non nul. On désigne par α_m et β_m les racines (éventuellement confondues) de $f_m(x)$, et on considère, dans le plan complexe, les points A_m et B_m d'affixes respectives α_m et β_m.
   a) Quel est le lieu de A_m et de B_m lorsque m décrit un plan passant par O ? Que peut-on dire des cercles de diamètres $A_M B_m$ lorsque m décrit la partie de ce plan correspondant à α_m et β_m ?
   b) Quel est le lieu de A_m et de B_m lorsque m décrit un cône de révolution S', de même sommet et même axe que S et de demi-angle au sommet θ' tel que l'on ait $0 < \theta' < \dfrac{\pi}{4}$?

CAPES externe 1972, composition 1

C. A. P. E. S.

Première composition de mathématiques.

Dans tout le problème, x désigne une variable réelle; k, n et p des entiers naturels; e désigne la base des logarithmes népériens. Toutes les fonctions intervenant dans le problème sont des fonctions numériques d'une variable réelle. Si une telle fonction f est pourvue de dérivées successives, les deux premières sont notées respectivement f' et f'', la dérivée d'ordre k est notée $f^{(k)}$ lorsque k est au moins égal à 3. De plus, si, et seulement si, cette dernière dérivée est continue sur un intervalle $[a, b]$, la fonction f est dite « k fois continûment dérivable sur $[a, b]$ ». La borne supérieure des nombres $|f^{(k)}(x)|$ lorsque x décrit $[a, b]$ est notée, lorsqu'elle existe,

$$\sup_{x \in [a, b]} |f^{(k)}(x)|.$$

Si $n \geqslant 1$, on note $n!$ le produit des entiers j tels que $1 \leqslant j \leqslant n$. Par convention $0! = 1$.

Première partie. — On définit la fonction numérique g de la variable réelle x par les relations

$$g(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{x}{e^x - 1} \quad \text{pour tout réel } x \text{ non nul.}$$

1° La fonction g est-elle continue au point $x = 0$, dérivable en ce point? Le cas échéant, calculer $g'(0)$, dérivée de g au point $x = 0$.

2° Étudier les variations de g (on pourra étudier la fonction auxiliaire z définie par $z(x) = e^x - 1 - xe^x$).

Faire une construction sommaire de la représentation graphique (Γ) de g, dans un repère orthonormé. On étudiera les branches infinies de (Γ).

3° *a*) Démontrer que la fonction h définie, pour tout réel x, par

$$h(x) = g(x) + \frac{x}{2}$$

admet à tout ordre n un développement limité au voisinage de $x = 0$, dont la partie régulière a la forme $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

b) Calculer le développement limité à l'ordre 5 de h au voisinage de $x = 0$. Que peut-on dire des coefficients a_1, a_3 et a_5?

c) La propriété trouvée ci-dessus est-elle généralisable à tous les coefficients de la forme a_{2k+1}?

4° Démontrer que les coefficients a_k vérifient, quel que soit l'entier n au moins égal à 2, la relation

$$n!\left[\frac{a_n}{1!}+\frac{a_{n-1}}{2!}+\cdots+\frac{a_2}{(n-1)!}\right]-\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}=0.$$

Vérifier l'exactitude des valeurs trouvées précédemment pour a_2 et a_4.

DEUXIÈME PARTIE. — Les nombres réels a_k sont les coefficients introduits dans la première partie, en 3° et 4°.

1° *a*) Soit f une fonction cinq fois dérivable sur $[0, 1]$. On pose

$$u(x)=f(x)-f(0)-\frac{x}{2}[f'(x)+f'(0)]+a_2x^2[f''(x)-f''(0)]+a_4Ax^5,$$

où A est une constante réelle.

Prouver qu'on peut choisir la valeur de A de sorte que $u(1)=0$. Cette condition étant réalisée, démontrer, en étudiant les dérivées successives de u, qu'il existe au moins un réel c, appartenant à l'intervalle $]0, 1[$, tel que $A=f^{(5)}(c)$.

b) Si la fonction f est quatre fois continûment dérivable sur $[0, 1]$, démontrer que l'on peut écrire

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{2}[f(0)+f(1)]-a_2[f'(1)-f'(0)]-a_4R,$$

où R est un nombre réel tel que

$$|R|\leqslant \sup_{x\in[0,1]}|f^{(4)}(x)|.$$

De même, n étant un entier quelconque au moins égal à 2, démontrer que, si la fonction f est quatre fois continûment dérivable sur $[0, n]$, on a

$$\int_0^n f(x)\,dx=\frac{1}{2}[f(0)+f(n)]+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)-a_2[f'(n)-f'(0)]-na_4S,$$

avec

$$|S|\leqslant \sup_{x\in[0,n]}|f^{(4)}(x)|$$

[on pourra introduire les fonctions qui à tout réel x de l'intervalle $[0, 1]$ associent respectivement $f(x)$, $f(x+1)$, ..., $f(x+n-1)$].

Enfin, n étant toujours supposé au moins égal à 2, démontrer que,

si la fonction f est quatre fois continûment dérivable sur $[a, b]$, on a

$$(1) \quad \int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{2}[f(a)+f(b)] + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right] - a_2\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 [f'(b) - f'(a)] - a_4\frac{(b-a)^5}{n^4}\mathrm{T},$$

avec $$|\mathrm{T}| \leqslant \sup_{x\in[a,\,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

2° On décide d'utiliser la formule (1) pour le calcul numérique approché de l'intégrale $\mathrm{I} = \int_a^b f(x)\,dx$. On adopte pour valeur approchée de I le réel

$$\mathrm{I}_1 = \frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{2}[f(a)+f(b)] + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right] - a_2\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 [f'(b) - f'(a)].$$

a) On pose $a = 0$, $b = 1$, $n = 5$ et $f(x) = e^{-x^2}$.

Donner numériquement un majorant aussi petit que possible de $|\mathrm{I} - \mathrm{I}_1|$, obtenu à partir de l'inégalité adjointe à la formule (1).

b) Calculer I_1 avec une précision de 10^{-4}, ou, si possible, 10^{-5}. On indiquera les caractéristiques de la table utilisée : table de logarithmes décimaux, ou table d'exponentielles naturelles, et dans les deux cas le nombre de décimales figurant sur la table. Indiquer la précision de la valeur approchée de I ainsi obtenue.

3° On peut également prendre pour valeur approchée de I le réel

$$\mathrm{I}_2 = \frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{2}[f(a)+f(b)] + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right],$$

dont le calcul est plus simple que celui de I_1. On admettra que l'on a

$$(2) \qquad |\mathrm{I} - \mathrm{I}_2| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2} \sup_{x\in[a,\,b]} |f''(x)|.$$

a) Avec les mêmes hypothèses qu'en 2°, *a*) de la deuxième partie, donner numériquement un majorant aussi petit que possible de $|\mathrm{I} - \mathrm{I}_2|$, obtenu à partir de la formule (2).

b) En conservant les hypothèses $a = 0$, $b = 1$ et $f(x) = e^{-x^2}$, quelle valeur faudrait-il donner à l'entier n dans l'expression de I_2 pour être assuré que le nombre $|I - I_2|$ est au plus égal à 3.10^{-5}?

Comparer l'intérêt des valeurs approchées I_1 et I_2.

TROISIÈME PARTIE. — Le nombre n étant un entier naturel au moins égal à 1, on appelle E_n l'espace vectoriel réel engendré par les polynômes qui à la variable réelle x associent respectivement 1, $x, \ldots, x^n$. Dans cette partie, par convention, $x^0 = 1$ pour tout réel x. A tout polynôme P de E_n, on fait correspondre, par l'application φ, le polynôme Q défini par

$$Q(x) = P(x + 1) - P(x).$$

1° Démontrer que φ est une application linéaire de E_n dans lui-même.

Trouver le noyau de φ et l'image par φ de E_n.

2° Soit R un polynôme nul ou de degré au plus égal à $n - 1$. Démontrer qu'il existe un, et un seul, polynôme P appartenant à E_n, tel que l'on ait simultanément

$$\begin{cases} \varphi(P) = R, \\ \displaystyle\int_0^1 P(x)\,dx = 0. \end{cases}$$

3° On note P_n le polynôme répondant à la question précédente lorsque $R(x) = nx^{n-1}$.

a) Calculer $P_1(x)$ et $P_2(x)$. Trouver une relation entre P'_n (polynôme dérivé de P_n) et P_{n-1}. Démontrer que l'on a, pour toute valeur du réel x,

$$P_n(x) = (-1)^n P_n(1 - x).$$

b) Calculer les coefficients de x^n et x^{n-1} dans $P_n(x)$. Soit $\alpha_{n,k}$ le coefficient de x^{n-k} dans $P_n(x)$, lorsque k est au moins égal à 2. Étant donné un tel entier k, démontrer que

$$\beta_k = \frac{(n-k)!}{n!}\alpha_{n,k}$$

est indépendant de l'entier n, supposé au moins égal à k. Démontrer que les nombres β_k sont égaux, pour $k \geqslant 2$, aux coefficients a_k introduits dans la première partie. Donner l'expression de $P_n(x)$ en fonction des a_k.

4° Les notations restent celles de la troisième partie, 3°.

a) En fonction des coefficients a_k, exprimer $P_{2n}(0)$, $P_{2n}(1)$, $P_{2n+1}(0)$ et $P_{2n+1}(1)$.

b) f étant une fonction $(2n+1)$ fois continûment dérivable sur $[0, 1]$, établir la relation

$$(3) \quad \int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2}[f(0)+f(1)] - \sum_{k=1}^{r} a_{2k}[f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)] - \frac{1}{(2r+1)!}\int_0^1 f^{(2r+1)}(t)P_{2r+1}(t)\,dt,$$

pour tout entier r tel que $1 \leqslant r \leqslant n$.

c) Étudier les variations de $P_1(x)$ et $P_2(x) - P_2(0)$ sur l'intervalle $[0, 1]$.
Prouver, par récurrence sur l'entier n $(n \geqslant 1)$, que

$$\begin{cases} P_{2n-1}(x) \text{ ne s'annule sur }]0, 1[\text{ que pour } x = \dfrac{1}{2}, \\ P_{2n}(x) - P_{2n}(0) \text{ ne s'annule pas sur }]0, 1[. \end{cases}$$

d) En déduire que, si f est une fonction $(2n+2)$ fois continûment dérivable sur $[0, 1]$, il existe au moins un réel c, appartenant à $[0, 1]$, tel que

$$(4) \quad \int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2}[f(0)+f(1)] - \sum_{k=1}^{n} a_{2k}[f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)] - a_{2n+2}f^{(2n+2)}(c).$$

(On pourra, à cet effet, introduire les bornes de la fonction continue $f^{(2n+2)}$ sur $[0, 1]$.)

Comparer ce résultat à ceux qui ont été obtenus dans la deuxième partie, en 1°, *b*), et indiquer les généralisations et applications possibles de la formule (4).

Deuxième composition de mathématiques.

Dans tout le problème, E désigne l'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$ dont les éléments, appelés *vecteurs* (ou *points* selon les cas), sont les couples (x, y) de nombres réels $(x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R})$. Au besoin, on notera $\vec{V} = (x, y)$ un vecteur quelconque et respectivement $\vec{0}, \vec{i}, \vec{j}$ les vecteurs $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$.

Rappelons que, par définition, une *norme* N sur E est une application N de E dans $\mathbf{R}^+$, ensemble des réels positifs ou nul, satisfaisant aux trois conditions (*a*), (*b*), (*c*) suivantes :

$$(a) \qquad N(\vec{V}) = 0 \Longleftrightarrow \vec{V} = \vec{0};$$

P R E P A R A T I O N A U C. A. P. E. S.

(2ème Epreuve du concours 1972)

Dans tout le problème, E désigne l'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$ dont les éléments, appelés *vecteurs* (ou *points* selon les cas), sont les couples (x, y) de nombres réels ($x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$). Au besoin, on notera $\vec{V} = (x, y)$ un vecteur quelconque et respectivement $\vec{0}$, $\vec{i}$, $\vec{j}$ les vecteurs (0,0), (1,0) (0,1).

Rappelons que, par définition, une *norme* N sur E est une application N de E dans $\mathbf{R}^+$, ensemble des réels positifs ou nul, satisfaisant aux trois conditions (*a*), (*b*), (*c*) suivantes :

(*a*) $$N(\vec{V}) = 0 \Leftrightarrow \vec{V} = \vec{0};$$

(*b*) pour tout $\vec{V}$ appartenant à E et pour tout λ appartenant à $\mathbf{R}$,

$$N(\lambda \vec{V}) = |\lambda| . N(\vec{V});$$

(*c*) pour tous $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ appartenant à E,

$$N(\vec{V} + \vec{V}') \leqslant N(\vec{V}) + N(\vec{V}') \qquad \text{(inégalité triangulaire).}$$

Les dessins concernant $\mathbf{R}^2$ demandés dans la partie I seront exécutés en axes *physiquement perpendiculaires*, chaque vecteur $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ayant pour longueur 2 centimètres.

Les parties I et II sont indépendantes. Dans la partie II, il n'est pas nécessaire d'avoir résolu les questions 2°, 3° et 4° pour aborder la suite, et l'on peut traiter les questions 7° et 8° de cette partie II sans avoir répondu aux questions précédentes.

I

1° Soit $\vec{V} = (x, y)$ un vecteur quelconque de E.

On pose

$$N_1(\vec{V}) = |x| + |y|.$$

Démontrer que l'on définit ainsi une norme sur E.

Dessiner la « sphère-unité » S_1, ensemble des points (x, y) tels que $N_1(\vec{V}) = 1$.

2° Soit toujours $\vec{V} = (x, y)$ un vecteur quelconque de E. On pose maintenant $N_\infty(\vec{V}) = \sup(|x|, |y|)$, c'est-à-dire le plus grand des deux nombres $|x|, |y|$ s'ils sont inégaux et leur valeur commune si $|x| = |y|$.

Démontrer que l'on définit ainsi encore une norme sur E.

Dessiner la « sphère-unité » S_∞ correspondante, ensemble des points (x, y) tels que $N_\infty(\vec{V}) = 1$.

3° Déterminer le plus grand nombre réel strictement positif A et le plus petit nombre réel strictement positif B tels que, pour tout $\vec{V}$ appartenant à E, l'on ait

(1) $$A.N_{\infty}(\vec{V}) \leqslant N_1(\vec{V}) \leqslant B.N_{\infty}(\vec{V}).$$

4° Existe-t-il des vecteurs $\vec{V}$ de E pour lesquels l'une des deux inégalités (1) soit une égalité? Si oui, préciser ces vecteurs.

5° Fixons-nous maintenant une norme N sur E, *quelconque*.

a. Démontrer qu'il existe un nombre réel β strictement positif tel que, pour tout $\vec{V}$ appartenant à E, l'on ait

$$N(\vec{V}) \leqslant \beta.N_{\infty}(\vec{V}).$$

b. Démontrer que, pour tout $\vec{V}$ appartenant à S_{∞} (cf. 2°), l'on a

$$N(\vec{V}) > 0.$$

On *admettra* alors qu'il existe au moins un vecteur $\vec{V}_0$ appartenant à S_{∞} tel que l'on ait, pour tout $\vec{V}$ appartenant à S_{∞}, $N(\vec{V}) \geqslant N(\vec{V}_0)$. En déduire qu'il existe un nombre réel strictement positif γ tel que, pour tout $\vec{V}$ appartenant à S_{∞}, l'on ait $N(\vec{V}) \geqslant \gamma$.

c. Démontrer qu'il existe un nombre réel α strictement positif tel que l'on ait, pour tout $\vec{V}$ appartenant à E,

$$\alpha.N_{\infty}(\vec{V}) \leqslant N(\vec{V}).$$

6° On considère deux normes N et N' sur E, quelconques et distinctes, mais fixées.

Déduire de ce qui précède qu'il existe deux nombres réels strictement positifs *a* et *b* tels que l'on ait, pour tout $\vec{V}$ appartenant à E,

(2) $$a.N'(\vec{V}) \leqslant N(\vec{V}) \leqslant b.N'(\vec{V}).$$

7° Pour tout $\vec{V} = (x, y)$ de E on pose

$$\mathcal{N}(\vec{V}) = \sup_{t \in [0,1]} |x + yt|,$$

borne supérieure des $|x + yt|$ quand t décrit le segment [0,1].

Démontrer que $\mathcal{N}$ est une norme sur E et tracer sa « sphère-unité » $\mathcal{S}$, ensemble des points (x, y) tels que $\mathcal{N}(\vec{V}) = 1$.

8° Mêmes questions pour

$$\mathcal{N}'(\vec{V}) = \int_0^1 |x + yt|\,dt$$

et la « sphère-unité » correspondante $\mathcal{S}'$.

9° Déterminer le plus grand nombre réel strictement positif p et le

plus petit nombre réel strictement positif q tels que l'on ait, pour tout $\vec{V}$ appartenant à E,

$$p.\mathcal{N}'(\vec{V}) \leqslant \mathcal{N}(\vec{V}) \leqslant q.\mathcal{N}'(\vec{V}).$$

(On pourra utiliser les « sphères-unité » $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$).

Pour quels $\vec{V}$ y a-t-il égalité?

II

Dans cette deuxième partie, on suppose E muni d'un *produit scalaire*, noté $(\vec{U}, \vec{V})$ pour deux vecteurs quelconques $\vec{U}$ et $\vec{V}$ de E. Ainsi E devient un *espace vectoriel euclidien.*

1° On pose $N(\vec{V}) = \sqrt{(\vec{V}, \vec{V})}$. Démontrer que N est une norme sur E. Cette norme étant la seule à intervenir dans la suite, on la notera **désormais** $\|\vec{V}\|$ au lieu de $N(\vec{V})$.

2° Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs quelconques de E. On pose

$$T(\vec{U}, \vec{V}) = \|\vec{U}\| + \|\vec{V}\| - \|\vec{U} + \vec{V}\|.$$

L'inégalité triangulaire démontrée dans le paragraphe précédent signifie évidemment que l'on a $T(\vec{U}, \vec{V}) \geqslant 0$ quels que soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$. Dans quel cas a-t-on $T(\vec{U}, \vec{V}) = 0$?

3° Soient $\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{W}$ trois vecteurs quelconques de E. On pose

$$S = \|\vec{U}\| + \|\vec{V}\| + \|\vec{W}\|$$

$$S' = \|\vec{U} + \vec{V} + \vec{W}\|$$

et

$$P(\vec{U}, \vec{V}) = \|\vec{U}\| + \|\vec{V}\| + \|\vec{U} + \vec{V}\|.$$

a. Démontrer que $S + S'$ est supérieur ou égal à chacun des trois nombres $P(\vec{U}, \vec{V})$, $P(\vec{V}, \vec{W})$, $P(\vec{W}, \vec{U})$.

b. Calculer d'autre part, en fonction de S et S', l'expression

$$Z = T(\vec{U}, \vec{V}) \,.\, P(\vec{U}, \vec{V}) + T(\vec{V}, \vec{W}) \,.\, P(\vec{V}, \vec{W}) + T(\vec{W}, \vec{U}) \,.\, P(\vec{W}, \vec{U}).$$

c. Déduire de *a* et de *b* que l'on a, pour tous $\vec{U}$, $\vec{V}$, $\vec{W}$ appartenant à E,

(3) $$\|\vec{U} + \vec{V}\| + \|\vec{V} + \vec{W}\| + \|\vec{W} + \vec{U}\| \leqslant S + S'$$

(inégalité quadrilatérale).

4° L'inégalité quadrilatérale précédente est-elle encore vraie pour trois vecteurs quelconques d'un espace vectoriel euclidien de dimension différente de 2 et pourquoi?

5° *Dans tout ce qui suit,* on se place dans un *espace affine euclidien* $\mathcal{E}$ associé à *l'espace vectoriel euclidien* E de dimension 2 étudié dans cette partie II et on se donne A, B, C, trois points fixes distincts non alignés de $\mathcal{E}$. On pose

$$a = \|\overrightarrow{BC}\|, \qquad b = \|\overrightarrow{CA}\|, \qquad c = \|\overrightarrow{AB}\|.$$

On choisit trois points A′, B′, C′ appartenant respectivement aux droites affines BC, CA, AB; on pose

$$\alpha = \| \overrightarrow{AA'} \|, \qquad \beta = \| \overrightarrow{BB'} \|, \qquad \gamma = \| \overrightarrow{CC'} \|$$

et

(4) $$\psi = \psi(A', B', C') = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Calculer ψ quand A′, B′, C′ sont les « milieux » respectifs des trois « segments [BC], [CA], [AB] », c'est-à-dire quand

$$\overrightarrow{A'B} = -\overrightarrow{A'C}, \quad \overrightarrow{B'C} = -\overrightarrow{B'A}, \quad \overrightarrow{C'A} = -\overrightarrow{C'B}.$$

6° On choisit maintenant les points A′, B′, C′ respectivement sur les droites affines BC, CA, AB et tels que

$$\overrightarrow{A'B} = x\,\overrightarrow{A'C}, \quad \overrightarrow{B'C} = x\,\overrightarrow{B'A}, \quad \overrightarrow{C'A} = x\,\overrightarrow{C'B}.$$

a. Calculer en fonction du nombre réel x la valeur correspondante de ψ, ψ étant toujours défini par (4).

b. Calculer la borne inférieure de ψ quand x décrit **R**. Cette borne inférieure est-elle atteinte? Si oui, pour quelle position des points A′, B′, C′?

7° On *admettra* que, si $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$ est un repère quelconque de l'espace affine $\mathcal{E}$, le rapport des aires des triangles $A_1 A_2 A_3$ et OIJ est égal à la valeur absolue du déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$, où (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) désignent les coordonnées respectives des points A_1, A_2, A_3 dans le repère $(O, \vec{OI}, \vec{OJ})$.

On choisit alors *librement* les points A′, B′, C′ sur les droites affines respectives BC, CA, AB et l'on pose

$$\overrightarrow{A'B} = x\,\overrightarrow{A'C}, \quad \overrightarrow{B'C} = y\,\overrightarrow{B'A}, \quad \overrightarrow{C'A} = z\,\overrightarrow{C'B}.$$

Calculer en fonction des trois nombres réels x, y, z le rapport $f = f(x, y, z)$ des aires des triangles A′B′C′ et ABC.

Déterminer la borne inférieure de $f(x, y, z)$ pour l'ensemble des triplets (x, y, z) considérés. Cette borne est-elle atteinte?

8° Toujours avec les conditions et notations du 7°, on appelle PQR, quand il existe, le triangle déterminé par les trois droites affines AA′, BB′, CC′. Calculer le rapport $g = g(x, y, z)$ des aires des triangles PQR et ABC.

Quelle est la borne inférieure de $g(x, y, z)$ pour l'ensemble des triplets (x, y, z) considérés? Cette borne est-elle atteinte?

en écrivant enfin $P_{2n+2}(0) = (2n+2)!\, a_{2n+2}$, on obtient

$$\frac{1}{(2n+1)!} \int_0^1 f^{(2n+1)}(t)\, P_{2n+1}(t)\, dt = -\, a_{2n+2}\, f^{(2n+2)}(c) \qquad c \in \left]0,1\right[$$

Lorsque n augmente, le reste de la formule de Mac-Laurin ne tend pas vers 0 , au contraire de celui de la formule de Taylor.

On peut généraliser sans mal à un segment $[a,b]$ en posant $t = a + (b-a)\,x$.

CAPES externe 1973, composition 1

1973

ÉNONCÉ

Le but du problème est l'étude détaillée d'une approximation classique de la fonction exponentielle. On adoptera la notation e^x ou $\exp x$, au choix. Dans tout l'énoncé, *x désigne un réel et n un entier positif* ($n \geqslant 1$); des conditions supplémentaires pourront être éventuellement imposées à x et à n.

Seules seront prises en considération les réponses *justifiées* aux questions posées.

Soit f_n la fonction numérique de la variable réelle x, $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, ainsi définie :

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n & \text{si} \quad x \geqslant -n \\ 0 & \text{si} \quad x < -n \end{cases} \qquad (n \text{ entier} \geqslant 1).$$

1. Étudier brièvement et représenter sur un même graphique les fonctions f_1, f_2, f_3.

2. Démontrer que f_n est continue sur $\mathbf{R}$, quel que soit l'entier n supérieur ou égal à 1.

3. La fonction f_1 est-elle dérivable sur $\mathbf{R}$? Pour tout $n \geqslant 2$, démontrer qu'il existe un entier ω (dépendant de n), que l'on déterminera, tel que f_n soit dérivable sur $\mathbf{R}$ jusqu'à l'ordre $(\omega - 1)$ inclus, mais pas à l'ordre ω.

4. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = e^x$$

5. Plus généralement, (a_n) étant une suite réelle, soient $(\mathcal{A})$ et $(\mathcal{B})$ les conditions

$$(\mathcal{A}) : \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 0$$

$$(\mathcal{B}) : \lim_{n \to \infty} \left[e^{-a_n} \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n \right] = 1.$$

a. Démontrer que $(\mathcal{A}) \Rightarrow (\mathcal{B})$.

b. La réciproque $(\mathcal{B}) \Rightarrow (\mathcal{A})$ est-elle vraie? (On pourra démontrer d'abord que $(\mathcal{B})$ implique $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n} = 0$).

6. *a.* Étudier la variation de la fonction

$$t \longmapsto \varphi(t) = \left(1 + \frac{x}{t}\right)^t,$$

x fixé $\neq 0$, la variable réelle t satisfaisant à $t > 0$, et, de surcroît, si $x < 0$, à $t > -x$.

b. En déduire que l'on a, quels que soient l'entier $n \geqslant 1$ et le réel x,

$$f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$$

c. En désignant toujours par n un entier quelconque $\geqslant 1$, démontrer que l'on a, pour tout réel x différent de zéro satisfaisant à $x \geqslant -n$,

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < e^x,$$

et, pour tout réel x différent de zéro satisfaisant à $x \leqslant n$,

$$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n < e^{-x}.$$

7. On pose

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{n^2} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{n}\right)^n dx \quad \text{et} \quad \mathrm{J}_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{n}\right)^{-n} dx.$$

a. Pour quelles valeurs de n l'intégrale J_n converge-t-elle?

b. Démontrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\, dx$ converge.

c. Prouver la double inégalité

$$\mathrm{I}_n \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\, dx \leqslant \mathrm{J}_n.$$

d. Calculer I_n et J_n par les changements de variable respectifs $u = 1 - \frac{\sqrt{x}}{n}$ et $v = 1 + \frac{\sqrt{x}}{n}$.

e. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\, dx$.

f. Calculer directement $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\, dx$ au moyen d'une primitive de $e^{-\sqrt{x}}$ (que l'on pourra obtenir par un changement de variable).

g. Plus généralement, calculer directement

$$\mathrm{V}_k = \int_0^{+\infty} \exp\left(-x^{\frac{1}{k}}\right) dx, \qquad k \text{ entier } \geqslant 1,$$

par un procédé analogue.

8. Dans cette question 8., on s'intéresse à quelques équivalents ou développements limités liés à $f_n(x)$. Les réels x et y qui interviennent sont *fixés non nuls.*

a. Trouver un infiniment petit équivalent à

$$f_n(x + y) - f_n(x)\, f_n(y)$$

quand n tend vers l'infini.

b. Même question pour $[f_n(x)]^y - f_n(xy)$.

c. Déterminer un développement limité d'ordre 2 en $\frac{1}{n}$ de $e^{-x} f_n(x)$ quand n tend vers l'infini.

d. Plus généralement, montrer que, pour tout entier $k \geqslant 1$, il existe des polynômes $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots \mathrm{A}_k$ (qu'on ne demande pas de déterminer pour $k \geqslant 3$) tels que

$$e^{-x} f_n(x) = 1 + \frac{\mathrm{A}_1(x)}{n} + \frac{\mathrm{A}_2(x)}{n^2} + \ldots + \frac{\mathrm{A}_k(x)}{n^k} + \frac{1}{n^k} \alpha(n),$$

avec $\lim_{n \to \infty} \alpha(n) = 0$.

9. On pose

$$\mathrm{F}_n(x) = e^x - f_n(x). \qquad [\text{Alors } \mathrm{F}_n(0) = 0].$$

a. Démontrer que $\mathrm{F}_n(x) > 0$ pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour tout réel $x \neq 0$.

b. Le réel x étant fixé non nul, la question 4. montre que $\mathrm{F}_n(x)$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini; trouver, dans ces conditions, un infiniment petit équivalent à $\mathrm{F}_n(x)$.

c. Pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $n \geqslant 1$, démontrer l'inégalité

$$\mathrm{F}_n(x) \leqslant \frac{x^2}{n} e^x.$$

(On pourra séparer les 3 cas : $x \leqslant -n$, $\quad x \geqslant n$, $\quad -n < x < n$).

10. On se propose enfin d'étudier avec précision

$$\varphi_n = \sup_{x \leqslant 0} F_n(x),$$

borne supérieure des $F_n(x)$ quand, n étant fixé, x décrit l'intervalle $]-\infty, 0]$.

a. Démontrer que

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = 0$$

b. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 2$, l'équation $F'_n(x) = 0$ admet pour racines 0 et x_n, avec $-n < x_n < 0$. [F'_n désigne la dérivée de F_n. On pourra mettre $F'_n(x)$ sous la forme $e^x H_n(x)$ et étudier $H_n(x)$]. Démontrer que $\varphi_n = F_n(x_n)$.

c. On pose $x_n = -n\xi_n$, en sorte que $0 < \xi_n < 1$. Démontrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = 0$.

d. Trouver un infiniment petit équivalent à ξ_n quand n tend vers l'infini. Que peut-on en déduire pour x_n?

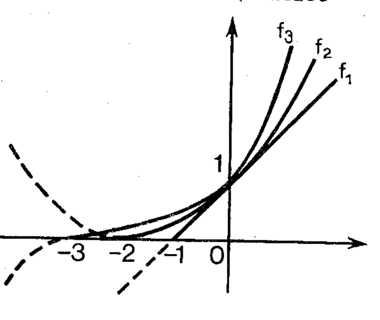
e. Trouver un infiniment petit équivalent à φ_n quand n tend vers l'infini.

CORRIGÉ

1°) Gf_1 est la réunion de deux demi-droites issues du point $(-1,0)$ et est donc continue non dérivable en $(-1,0)$.

Gf_2 est la réunion d'une demi-parabole et de sa demi-tangente au sommet $(-2,0)$. f_2 est donc continue, dérivable, non 2 fois (contact d'ordre 1).

Gf_3 est la réunion d'une demi-cubique et de sa tangente au point d'inflexion $(-3,0)$. f_3 est donc continue et deux fois dérivable (contact d'ordre2). (On a noté Gf_i le graphe de la fonction f_i). Observez que les f_i passent toutes par le point $(0,1)$ et ont pour dérivée en ce point $f'_n = (1+\frac{0}{n})^{n-1} = 1$. Elles sont donc toutes tangentes à f_1 au point $(0,1)$. On a enfin $f_n \leqslant f_{n+1}$ (cf question 6.b.).



▶ 2°) f_n est définie sur ℝ ; la continuité pour $x \neq -n$ résulte de la continuité d'une fonction polynomiale. En $x = -n$, on a $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -n} f_n(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} -n} 0 = 0$ et $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -n} f_n(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} -n} (1+\frac{x}{n})^n = 0$;

donc $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -n} f_n = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} -n} f_n = f_n(-n) = 0$, ce qui prouve la continuité au point $-n$.

▶ 3°) On a vu que f_1 n'est pas dérivable $\left(\lim\limits_{h \overset{>}{\to} 0} \frac{f_1(-1+h) - f_1(-1)}{h} = +1\right.$ et $\left.\lim\limits_{h \overset{<}{\to} 0} \frac{f_1(-1+h) - f_1(-1)}{h} = 0\right)$. Supposons que f_n soit dérivable jusqu'à l'ordre $n-1$, mais pas à l'ordre n. Nous voyons que f_n est de classe C^∞ sur $]-\infty, -n[$ et $]-n, +\infty[$, le seul problème est en $-n$. Soit f_{n+1}, comme $n+1 > 1$ pour $n > 1$, f_{n+1} est dérivable (récurrence) et $f'_{n+1} = (1+\frac{x}{n+1})^n$ si $x > -n-1$, $f'_{n+1} = 0$ si $x < -n-1$, donc $f'_{n+1} = f_n(\frac{nx}{n+1})$, comme $x \longmapsto \frac{nx}{n+1}$ est C^∞, f'_{n+1} est dérivable jusqu'à l'ordre $n-1$ mais pas à l'ordre n.

c.q.f.d.

▶ 4°) Comme x est fixé, il existe n_o tel que $n_o > -x$. Donc, si $n > n_o$, $f_n(x) = (1+\frac{x}{n})^n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} e^{n\mathrm{Log}(1+x/n)} = \lim\limits_{n\to\infty} (e^{x+O(1)})$

soit $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = e^x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

▶ <u>5°) a)</u> Si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 0$, on a aussi $\lim \frac{a_n}{n} = \lim(\frac{a_n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}) =$

$\lim \frac{a_n}{\sqrt{n}} \lim \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0$. L'expression proposée sécrit

$e^{-a_n + n\,\mathrm{Log}(1+\frac{a_n}{n})}$; pour $n > n_o$ on a $|\frac{a_n}{n}| < \delta$ et on peut faire un développement limité du Logarithme :

$a_n + n\,\mathrm{Log}(1+\frac{a_n}{n}) = -a_n + n\left[\frac{a_n}{n} - \frac{a_n^2}{2n^2} + O(\frac{a_n^2}{n^2})\right]$; on a donc à étudier

$e^{-\frac{a_n^2}{2n} + O(\frac{a_n^2}{n})} = 1 - \frac{a_n^2}{2n} + O(\frac{a_n^2}{n})$ dont la limite est 1 puisque si $\frac{a_n}{\sqrt{n}}$ tend vers 0, $x \longmapsto x^2$ étant <u>continue</u> $\frac{a_n^2}{n}$ tend vers 0.

CAPES DE MATHÉMATIQUES (SESSION 1973)

SECONDE ÉPREUVE

PRÉLIMINAIRE

On « complète » l'ensemble $\mathbf{C}$ des nombres complexes par un élément ω ($\omega \notin \mathbf{C}$) et l'on pose :

$$\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\omega\}$$

Les règles de calcul dans $\overline{\mathbf{C}}$ sont lorsque ω n'intervient pas, les règles usuelles dans $\mathbf{C}$. En outre toute fonction homographique :

$$f \; : \; \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$$
$$z \longmapsto f(z) = \frac{pz+q}{rz+s}$$
$$(p,\; q,\; r,\; s \quad \text{éléments de } \mathbf{C}, \qquad r \neq 0)$$

sera « prolongée » dans $\overline{\mathbf{C}}$ par la convention :

$$f(\omega) = \frac{p}{r}$$

(donc en particulier, si $f(z) = \dfrac{q}{z}$, $\quad f(\omega) = 0$ pour tout q élément de $\mathbf{C}$).

Selon l'usage, à tout nombre complexe $a = \alpha + i\beta$ (α et β réels) on associe bijectivement dans un plan affine euclidien $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$, le point A de coordonnées α et β; le nombre complexe a est dit affixe de A. Si l'on veut rappeler ce fait, on écrira $A(a)$.

L'ensemble $\overline{\mathcal{P}}$ des images des éléments de $\overline{\mathbf{C}}$ est l'union du plan $\mathcal{P}$ et d'un ensemble dont l'élément unique Ω est appelé « image » de ω; ω est dit « affixe » de Ω et l'on pourra écrire $\Omega(\omega)$. Ω sera aussi appelé point, mais ne pourra être représenté dans $\mathcal{P}$:

$$\overline{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \cup \{\Omega\}$$

Dans $\mathcal{P}$, le mot « cercle » sera toujours pris dans son sens strict (points non alignés).

Les solutions de certaines questions pourront être utilement illustrées de figures géométriques.

PREMIÈRE PARTIE

On considère trois points $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ de $\mathcal{P}$ tel que les quatre points O, A, B, C soient deux à deux distincts :

$$abc(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0.$$

Au triplet (A, B, C) on associe le nombre complexe :

$$k = \frac{b(c-a)}{c(b-a)}$$

1° Démontrer que k n'est égal ni à zéro, ni à un.

2° On associe de la même manière un nombre complexe à chacun des cinq autres triplets que l'on peut former avec les trois points A, B, C. (Par exemple, au triplet (B, C, A) sera associé le nombre complexe $\dfrac{c(a-b)}{a(c-b)}$).

Exprimer chacun de ces cinq nombres complexes en fonction de k seul. (On trouvera suivant le cas une fonction affine ou une fonction homographique).

3° Démontrer que les six nombres complexes ainsi obtenus sont réels si, et seulement si, l'un d'entre eux est réel.

4° Démontrer que les quatre points O, A, B, C sont cocycliques ou colinéaires dans $\mathcal{P}$ si, et seulement si, k est réel.

5° On considère à nouveau les six nombres associés aux divers triplets formés avec A, B, et C. Quand, passant de $\mathcal{P}$ à $\overline{\mathcal{P}}$, on substitue au point C le point Ω, montrer que la convention de calcul dans $\overline{\mathbb{C}}$ adoptée dans le préliminaire permet d'attribuer à chacun de ces six nombres une valeur que l'on précisera.

6° On conviendra d'appeler cercle (resp. droite) de $\overline{\mathcal{P}}$ un cercle (resp. une droite) de $\mathcal{P}$, complété(e) éventuellement par le point Ω comme cela découlera de la suite du texte. On convient aussi que la convention démontrée ci-dessus au 4° dans $\mathcal{P}$ caractérise encore les cercles ou droites de $\overline{\mathcal{P}}$ qui contiennent le point O.

Démontrer alors que :

a. Le point Ω appartient à toute droite de $\overline{\mathcal{P}}$ contenant O.

b. Le point Ω n'appartient à aucun cercle de $\overline{\mathcal{P}}$ contenant O.

DEUXIÈME PARTIE

Dans cette partie, on travaille dans le plan $\mathcal{P}$ et on suppose les deux points $A(a)$ et $B(b)$ distincts et tous deux distincts du point O :

$$ab(a-b) \neq 0.$$

On désigne par $\overline{z}$ le nombre complexe conjugué de z; on rapelle que z est réel si, et seulement si, z et $\overline{z}$ sont égaux.

1° Démontrer que les droites (OA) et (OB) sont orthogonales si, et seulement si, $a\overline{b}+b\overline{a}$ est nul.

2° Démontrer que O, A et B sont alignés si, et seulement si, $a\overline{b}-b\overline{a}$ est nul.

3° Si O, A et B ne sont pas alignés, on envisage le cercle γ circonscrit au triangle (O, A, B). Démontrer que la tangente θ_A en A à γ est l'ensemble des points $M(z)$ pour lesquels $\dfrac{b(z-a)}{a(b-a)}$ est réel.

En déduire :

$$[M \in \theta_A] \Longleftrightarrow [z\, b\, \overline{a}\,(\overline{a}-\overline{b}) - \overline{z}\,\overline{b}\, a(a-b) + a\overline{a}\,(a\overline{b}-b\overline{a}) = 0]$$

4° Si A et B ne sont pas diamétralement opposés sur γ, les tangentes θ_A et θ_B à γ respectivement en A et B se coupent en $T(t)$.

Déterminer t et $\overline{t}$ en fonction de a, b, $\overline{a}$ et $\overline{b}$.

Déterminer, en fonction de a et b seulement, l'affixe u de U, second point commun au cercle γ et à la droite (OT).

5° Si A et B sont diamétralement opposés sur γ, on appelle encore $U(u)$ le second point commun au cercle γ et à la perpendiculaire menée de O à la droite (AB). Déterminer alors u en fonction de a et b.

TROISIÈME PARTIE

L'ensemble $\mathcal{E}$ que l'on va étudier ici est $\overline{\mathcal{P}}$ privé du point O :

$$\mathcal{E} = \overline{\mathcal{P}} \setminus \{O\}.$$

On envisage les sous-ensembles δ de $\overline{\mathcal{P}}$ dont chacun est ou bien une droite contenant O, ou bien un cercle contenant O. A chaque δ, sous-ensemble de $\overline{\mathcal{P}}$, on associe le sous-ensemble Δ de $\mathcal{E}$ qui est l'intersection de δ et de $\mathcal{E}$:

$$\Delta = \delta \setminus \{O\}.$$

Ces sous-ensembles Δ de $\mathcal{E}$ sont appelés « pseudo-droites ».

Dans $\overline{\mathcal{P}}$, la tangente en O à δ, cercle ou droite de $\overline{\mathcal{P}}$ contenant O, sera, par convention, la tangente en O à $\delta' = \delta \cap \mathcal{P}$ (c'est-à-dire δ' elle-même dans le cas ou δ' est une droite), cette tangente étant, bien entendu, enrichie du point Ω.

Parmi les parties suivantes, certaines pourront être traitées géométriquement.

1° Démontrer que, deux points A et B distincts étant donnés dans $\mathcal{E}$, il existe dans $\mathcal{E}$ une pseudo-droite Δ et une seule contenant ces deux points (on examinera en particulier le cas où A, par exemple, est Ω).

2° Si l'on se donne dans $\mathcal{E}$ une pseudo-droite Δ et un point A n'appartenant pas à Δ, démontrer qu'il existe une pseudo-droite Δ' et une seule qui contienne A et dont l'intersection avec Δ soit vide (on examinera en particulier le cas où A est Ω).

3° Démontrer que si deux pseudo-droites Δ_1 et Δ_2 sont distinctes, leur intersection est soit constituée par un point et un seul (on dira alors qu'elles sont sécantes), soit l'ensemble vide.

4° On dit que deux pseudo-droites Δ_1 et Δ_2 sont pseudo-parallèles si δ_1 et δ_2 qui leur sont associées dans $\overline{\mathcal{P}}$ ont même tangente en O.

Démontrer que le pseudo-parallélisme est une relation d'équivalence entre pseudo-droites.

Démontrer que Δ_1 et Δ_2 sont pseudo-parallèles si, et seulement si, Δ_1 et Δ_2 ne sont pas pseudo-sécantes.

5° Démontrer que si $A(a)$ et $B(b)$ sont deux points de $\mathcal{P}$ non alignés avec O et tels que $ab(a-b) \neq 0$, dans le plan $\mathcal{P}$ la tangente en O au cercle (O, A, B) est l'ensemble des points $M(z)$ dont les affixes vérifient :

$$z\,\overline{a}\,\overline{b}\,(a-b) - \overline{z}\,a\,b\,(\overline{a}-\overline{b}) = 0.$$

Si $A(a)$ et $B(b)$ de $\mathcal{P}$, toujours tels que $ab(a-b) \neq 0$, sont alignés avec O, l'équation précédente caractérise-t-elle encore dans $\mathcal{P}$ les affixes z des points M de la droite (AB)?

6° On envisage dans $\overline{\mathcal{P}}$ les sous-ensembles δ_1, [défini par $A_1(a_1)$ et $B_1(b_1)$] et δ_2 [défini par $A_2(a_2)$ et $B_2(b_2)$], avec $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$, $a_1 \neq b_1$ et $a_2 \neq b_2$.

Démontrer que Δ_1 et Δ_2 asoociées à δ_1 et δ_2 sont pseudo-parallèles si, et seulement si,

$$\frac{\dfrac{1}{a_1} - \dfrac{1}{b_1}}{\dfrac{1}{a_2} - \dfrac{1}{b_2}} \text{ est un réel.}$$

(On n'oubliera pas d'examiner le cas où A_1 et Ω, ni celui où A_1 et A_2 sont Ω).

7° $A(a)$ et $B(b)$ étant donnés dans $\mathcal{E}$, distincts ou non, on leur associe le point $U(u)$ tle que

$$\frac{2}{u} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

a. Démontrer que U est défini et unique dans $\mathcal{E}$.

S'il est nécessaire, on notera U associé à A et B par l'écriture $U(A, B)$.

b. Quel est U quand A et B sont confondus?

c. Si A et B sont distincts, démontrer que U appartient à la pseudo-droite Δ définie par A et B.

Si δ associé à Δ est une droite, quelle est la disposition des quatre points O, U, A, B?

Si δ associé à Δ est un cercle, quelle construction géométrique peut-on proposer pour U?

d. Si quatre points $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ et $D(d)$, deux à deux distincts, de $\mathcal{E}$ vérifient $U(A, C) = U(B, D)$, quelle configuration présentent les pseudo-droites définies par A et B d'une part, et les pseudo-droites définies par A et D et par B et C d'autre part?

Réciproquement, si une telle configuration est donnée à priori à partir de quatre pseudo-droites deux à deux distinctes, les quatre points que définissent ces pseudo-droites par leurs intersections respectives satisfont-ils une relation du type $U(A, C) = U(B, D)$?

8° Plus généralement, étant donnés deux points $A(a)$ et $B(b)$, distincts ou non, dans $\mathcal{E}$, soit un point $V(v)$ de $\mathcal{E}$ tel que

$$\frac{1+\lambda}{v} = \frac{1}{a} + \frac{\lambda}{b} \quad \text{où } \lambda \text{ est un réel donné.}$$

Discuter selon les positions de A et B dans $\mathcal{E}$ et les valeurs du réel λ, l'existence et l'unicité du point V.

Si A et B sont distincts, démontrer que V, s'il existe, appartient à la pseudo-droite définie par A et B.

Tout point de cette pseudo-droite peut-il être considéré comme un point V pour un choix convenable de λ?

9° Deux pseudo-droites distinctes Δ_1 et Δ_2 de $\mathcal{E}$, définies respectivement par $A_1(a_1)$ et $B_1(b_1)$ d'une part, par $A_2(a2)$ et $B_2(a_2)$ d'autre part, avec $a_1 \neq b_1$ et $a_2 \neq b_2$, sont maintenant données pseudo-parallèles.

Soit $A_3(a_3)$ tel que

$$\frac{1+\lambda}{a_3} = \frac{1}{a_1} + \frac{\lambda}{a_2}$$

et soit $B_3(b_3)$ tel que

$$\frac{1+\mu}{b_3} = \frac{1}{b_1} + \frac{\mu}{b_2}, \text{ où } \lambda \text{ et } \mu \text{ sont deux réels donnés.}$$

(On suppose que A_3 et B_3 existent).

Déterminer sur λ et μ une condition nécessaire et suffisante pour que la pseudo-droite Δ_3 définie par $A_3(a_3)$ et $B_3(b_3)$ soit pseudo-parallèle à Δ_1 et à Δ_2.

[illegible] $+ o(\xi_n)$ et $\frac{2}{n}\frac{1}{\xi_n}$ [illegible] $1 + o(1)$

implique $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{2}{n\xi_n} = 1$ c'est-à-dire $\xi_n \sim \frac{2}{n}$. Ceci prouve que $x_n = -n\xi_n$ tend vers -2 et $\varphi_n = F_n(x_n) = e^{x_n} - (1 + \frac{x_n}{n})^n = e^{x_n} - e^{n\mathrm{Log}(1+x_n/n)}$ car $\frac{x_n}{n} \to 0$ et $\varphi_n = e^{x_n}\left[1-(1-\frac{x_n^2}{2n}) + O(1/n))\right] = e^{x_n}\frac{x_n^2}{2n} + O(\frac{1}{n})$. Comme $x_n \to -2$, $\frac{n\varphi_n}{2e^{-2}} = e^{x_n+2} \cdot \frac{x_n^2}{4} + O(\frac{1}{n}) \underset{n \to \infty}{\longmapsto} 1$. Donc $\varphi_n \sim \frac{2}{n} e^{-2}$.

1974

ÉNONCÉ

Notations :

$\mathbf{N}^*$ ensemble des entiers strictement positifs; dans tout le problème n désignera un élément quelconque de $\mathbf{N}^*$.

$\mathbf{R}$ ensemble des réels.

$\mathbf{R}^*$ ensemble des réels non nuls.

$\mathbf{R}_+$ ensemble des réels positifs ou nuls.

$\mathbf{R}_+^*$ ensemble des réels strictement positifs.

La limite à droite d'une fonction φ de la variable réelle x pour une valeur x_0 sera notée $\lim\limits_{x_{0+}} \varphi(x)$.

$\mathrm{E}(x)$ est la partie entière du réel x, c'est-à-dire l'unique entier tel que : $\mathrm{E}(x) \leqslant x < \mathrm{E}(x) + 1$.

L'objet du problème est essentiellement l'étude de certaines propriétés des fonctions f_α définies par

$$f_\alpha : \begin{array}{l} \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto f_\alpha(x) = x^\alpha . \mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right) \end{array}$$

où α est un réel donné positif ou nul.

On demande une formulation précise des propriétés à établir; les représentations graphiques et les tracés de courbes demandés doivent illustrer les résultats mais non se substituer à leur démonstration.

PREMIÈRE PARTIE

1° Étudier la fonction : $\begin{array}{l} \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto \mathrm{E}(x) \end{array}$; on montrera que cette fonction est continue à droite pour toute valeur de x et qu'elle n'est pas continue pour x entier. En déduire l'étude de la continuité de la fonction f_0 et construire la courbe représentative de cette fonction.

On supposera $\alpha > 0$ dans toute la suite de cette première partie.

2° Démontrer que f_α est continue à gauche pour toute valeur de x et qu'elle est non continue pour $x = \frac{1}{n}$.

On se propose d'étudier le comportement de f_α lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures :

Donner un encadrement de $f_\alpha(x)$ pour $x \in \left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$.

Montrer que f_α peut être prolongée par continuité à droite pour $x = 0$ si et seulement si on a $\alpha \geqslant 1$. Dans ce cas on notera encore f_α la fonction obtenue en prolongeant par continuité à droite en 0 la fonction f_α initiale [c'est-à-dire que l'on a, par définition, $f_\alpha(0) = \lim\limits_{0_+} f_\alpha(x)$].

3° *a.* Étudier l'existence de la dérivée de f_α pour une valeur donnée de x. Montrer que f_α admet une dérivée à gauche en tout point $x > 0$.

b. Pour quelles valeurs de α, la fonction f_α admet-elle une dérivée à droite au point $x = 0$? Donner un équivalent de $f_\alpha(x)$, lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures, x étant pris pour infiniment petit principal.

4° Sur $\left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$, étudier le sens de variation de f_α et le signe de $f''_\alpha(x)$, dérivée-seconde de f_α en x.

5° *a.* Étudier le signe des expressions

$$\left[f_\alpha\left(\frac{1}{n}\right) - f_\alpha\left(\frac{1}{n+1}\right)\right] \quad \text{et} \quad \left[f_\alpha\left(\frac{1}{n+1}\right) - \lim_{\frac{1}{n+1}+} f_\alpha(x)\right].$$

(Un nombre réel peut être positif, négatif ou nul).

b. Discuter suivant les valeurs de α, lorsque n est un entier supérieur ou égal à 2, le signe de l'expression

$$\lim_{\frac{1}{n}+} f_\alpha(x) - \lim_{\frac{1}{n+1}+} f_\alpha(x).$$

(On pourra introduire la fonction

$$g_\alpha : \begin{array}{l} \left]0, \frac{1}{2}\right] \longrightarrow \mathbf{R} \\ x \longmapsto g_\alpha(x) = x^{\alpha-1} - x^\alpha \end{array}).$$

c. Étudier le signe de l'expression $[f_\alpha(x) - f_{\alpha'}(x)]$ pour x donné, α et α' étant deux réels positifs.

6° Construire soigneusement les courbes représentatives de la restriction à l'intervalle $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$ des fonctions f_α pour les valeurs suivantes de α : $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, 2. Pour chacune de ces fonctions, on prendra des axes rectangulaires et une même unité de longueur de 10 cm sur chacun des axes.

DEUXIÈME PARTIE

1° Démontrer que l'intégrale

$$\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f_\alpha(x) \cdot dx$$

a un sens et calculer sa valeur $I_\alpha(n)$.

2° On pose

$$J_\alpha(n) = \sum_{p=1}^{n} I_\alpha(p).$$

Montrer que l'on a :

$$J_\alpha(n) = \frac{1}{\alpha+1}\left[\left(\sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{p^{\alpha+1}}\right) - \frac{1}{(n+1)^\alpha}\right].$$

3° α étant fixé, on se propose d'étudier la suite $J_\alpha(n)$.

a. Montrer que cette suite est strictement croissante.

b. Montrer que l'on a :

$$J_0(n) > \int_2^{n+2} \frac{dx}{x}.$$

En déduire la nature de la suite $J_0(n)$.

c. Montrer que, pour $\alpha \geqslant 1$, on a $J_\alpha(n) \leqslant 1$.

Conclure.

d. Pour $\alpha \in]0, 1[$, montrer que l'on a :

$$\left(\forall x \in]0, 1], \ f_\alpha(x) \leqslant x^{\alpha-1}\right) \quad \text{et} \quad J_\alpha(n) < \frac{1}{\alpha}.$$

Conclure.

4° On pose

$$K = \lim_{n \to +\infty} J_2(n).$$

On se propose de calculer une valeur approchée de K.

a. Montrer que l'on a :

$$K = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^3}\right) = \frac{1}{3} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^3}.$$

b. On associe à la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^3}$ la série de terme

$n(n^2-1)$ défini pour $n \geq 2$. Déterminer les réels fixes a, b, c tels que l'on ait :

$$v_n = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n+1}.$$

En déduire l'expression de :

$$\sigma_n = \sum_{p=2}^{n} v_p, \qquad \sigma = \sum_{p=2}^{+\infty} v_p \qquad \text{et} \qquad \rho_n = \sigma - \sigma_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} v_p.$$

c. Montrer que, pour tout entier $p \geqslant n+1$, on a :

$$1 - \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant \frac{u_p}{v_p} < 1 \qquad (1)$$

On pose

$$s_n = \sum_{p=1}^{n} u_p \qquad \text{et} \qquad r_n = 3\mathrm{K} - s_n.$$

Déduire de la double inégalité (1) un encadrement de r_n.

Montrer que

$$\mathrm{A}_n = \frac{1}{3} s_n + \frac{1}{6n(n+1)}$$

est une valeur approchée par excès de K.

Donner un encadrement de K.

d. Application numérique : $n = 9$; calculer A_9 à 10^{-6} près.

En déduire un encadrement de K.

CORRIGÉ

PREMIERE PARTIE

1°) E est continue sur tout intervalle ouvert $]n, n+1[$, $n \in \mathbb{N}$, puisque constante. En un point $x = n$ entier, $\lim\limits_{\substack{x \to n \\ x > n}} E(x) = n = E(n)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to n \\ x < n}} E(x) = n-1 \neq E(n)$

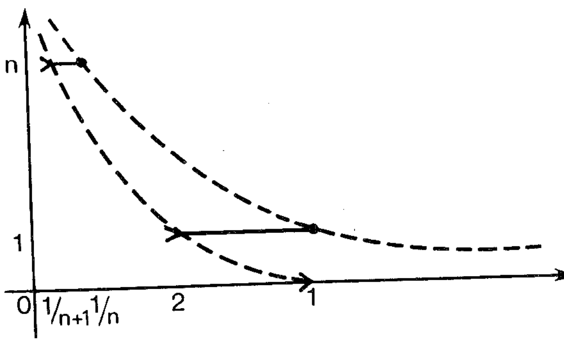
donc E est continue à droite pour tout x mais non continue à gauche aux points entiers.

$f_0(x) = E(\frac{1}{x})$; pour $x > 1$, f_0 est la fonction nulle ; d'autre part f_0 est continue sur tout intervalle $]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[$ n entier ≥ 1, mais n'est pas continue aux points $\frac{1}{n}$, n entier ≥ 1 ; toutefois elle est continue à gauche en ces points.

En raison des inégalités

$$\frac{1}{x} - 1 < E(\frac{1}{x}) \leq \frac{1}{x}$$

on voit que le graphe de f_0 est situé entre les graphes des fonctions $x \to \frac{1}{x}$ et $x \to \frac{1}{x} - 1$.



▶ 2°) $f_\alpha(x) = x^\alpha \; E(\frac{1}{x})$ est nulle sur $]1, \infty[$; elle est continue sur tout intervalle $]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[$, n entier ≥ 1, comme produit de fonctions continues ; en un point $x = \frac{1}{n}$, $x \to x^\alpha$ est continue, $x \to E(\frac{1}{x})$ est continue à gauche, donc f_α est continue à gauche, mais ne peut être continue, car non continue à droite puisque $x \to E(\frac{1}{x})$ ne l'est pas.

Pour $x \in]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, on a $E(\frac{1}{x}) = n$, d'où $\frac{n}{(n+1)^\alpha} < f_\alpha(x) \leq \frac{1}{n^{\alpha-1}}$

quand $x \to 0$, $E(\frac{1}{x}) \sim \frac{1}{x}$, d'où $f_\alpha(x) \sim x^{\alpha-1}$. On peut donc prolonger par continuité à droite en $x > 0$ la fonction f_α si et seulement si $\alpha - 1 \geq 0$.

On aura dans ce cas $f_\alpha(0) = 1$ si $\alpha = 1$ et $f_\alpha(0) = 0$ si $\alpha > 1$.

▶ 3°) a)- f_α est sur tout intervalle $]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ la restriction de la fonction dérivable $n\,x^\alpha$; elle est donc dérivable en tout point x de l'intervalle ouvert et seulement dérivable à gauche aux points $x = \frac{1}{n}$:

b)- On a déja vu que $f_\alpha(x) \sim x^{\alpha-1}$ si $x \to 0^+$.

f_α sera dérivable à droite au point $x = 0$ si et seulement si f_α est continue en 0 et si le rapport $\frac{f_\alpha(x) - f_\alpha(0)}{x}$ a une limite quand $x \to 0^+$.

Donc $\alpha \geq 1$ et on doit distinguer les cas $\alpha = 1$ et $\alpha > 1$.

. si $\alpha > 1$, $\frac{1}{x}(f_\alpha(x) - f_\alpha(0)) = \frac{f_\alpha(x)}{x} \sim x^{\alpha-2}$; f_α sera dérivable si et seulement si $\alpha \geq 2$.

. si $\alpha = 1$, $\frac{1}{x}(f_\alpha(x) - f_\alpha(0)) = E(\frac{1}{x}) - \frac{1}{x}$; si on considère les deux suites

b. Étant donné un élément p unitaire, montrer qu'il existe un nombre réel α et un vecteur v unitaire de F tels que

$$p = (\cos \alpha)\, e_1 + (\sin \alpha)\, v .$$

Montrer que les endomorphismes f_p et g_p peuvent alors s'écrire :

$$f_p = (\cos \alpha)\, \mathrm{I} + (\sin \alpha) f_v \quad \text{et} \quad g_p = (\cos \alpha)\, \mathrm{I} + (\sin \alpha)\, g_v$$

où I désigne l'application identique.

2° Dans cette question III. 2° et la suivante III. 3° on prendra p unitaire sous la forme

$$p = (\cos \alpha)\, e_1 + (\sin \alpha)\, v$$

avec $\sin \alpha \neq 0$.

a. Montrer que les endomorphismes f_p, g_p, f_v, g_v sont des isométries positives de E;

b. Montrer que f_v (resp g_v) transforme tout vecteur u non nul de E en un vecteur u' (resp u'') orthogonal à u.

c. Que peut-on dire de f_v^2 et g_v^2 ?

d. Montrer que le plan Π_1 (resp Π_2) défini et orienté par la base (u, u') [resp (u, u'')] est stable par f_p (resp g_p).

Quelle est la restriction de f_p (resp g_p) à Π_1 (resp Π_2).

3° *a.* Montrer que le plan (P) défini et orienté par la base $(e_1 ; v)$ est stable par f_v, g_v, f_p, g_p.

b. Si u est un vecteur unitaire orthogonal à (P), montrer que $(e_1 ; v ; u ; u')$ forme une base orthonormée et que $u'' = -u'$.
(On pourra utiliser la transformation h_v).

c. Écrire les matrices de f_p et g_p relatives à la base $(e_1 ; v ; u ; u')$.

53-0-2

J. 1242

SESSION DE 1974

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 5 heures

PARTIE I

1° Étant donnée une matrice carrée A, de n lignes et n colonnes, à éléments réels, on appelle trace de A et on note tr A, la somme des éléments de la diagonale principale de A. Ainsi si a_{ij} désigne l'élément placé sur la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne, on a :

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} .$$

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n.

Montrer que

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

En déduire que deux matrices semblables ont même trace.

2° Soit F un espace vectoriel euclidien de dimension 3.
Soit, relativement à une base orthonormée de F convenue de sens direct, A la matrice d'une rotation vectorielle f, *distincte de l'application identique.*

La rotation vectorielle f est définie comme il suit :

— Un axe est la droite vectorielle définie et orientée par le vecteur unitaire u.

— Une mesure de la rotation associée à cet axe est le nombre réel θ.

a. A l'aide d'une base orthonormée auxiliaire dont le troisième vecteur est le vecteur unitaire u, calculer $\cos\theta$ en fonction de la trace de A;

b. x désignant un élément quelconque non nul de F, non colinéaire à u, montrer que, par rapport à toute base de sens direct de F, le déterminant des vecteurs $(x, f(x), u)$ a le signe de $\sin\theta$, ce déterminant ne s'annulant que si $\sin\theta = 0$.

Tournez la page S. V. P.

On pourra se ramener au cas où le vecteur x est unitaire et orthogonal à u [on rappelle que le déterminant des vecteurs $(x, f(x), u)$ dans une base est le déterminant de la matrice dont les colonnes ont pour éléments respectifs les coordonnées des vecteurs x, $f(x)$ et u dans cette base].

3° Utiliser les résultats précédents pour caractériser la rotation f dont la matrice A par rapport à une base orthonormée convenue de sens direct est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On déterminera un axe de f par le choix de celui des vecteurs unitaires invariants dont la première coordonnée est positive et on donnera une mesure de la rotation f associée à cet axe.

PARTIE II

On considère un espace vectoriel euclidien E de dimension 4 rapporté à la base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ convenue de sens direct.

On désigne respectivement par E_1 et F les sous-espaces définis et orientés par les bases (e_1) d'une part, (e_2, e_3, e_4) d'autre part.

p étant *un élément non nul* de E, p s'écrit

$$p = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4$$

$(a, b, c, d$ désignant des nombres réels).

On définit les endomorphismes f_p et g_p de E par leurs matrices A_p et B_p relatives à $\mathcal{B}$:

$$(\text{pour } f_p) \quad A_p = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix};$$

$$(\text{pour } g_p) \quad B_p = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}.$$

L'endomorphisme identique et la matrice unité d'ordre 4 seront notés I.

1° *a.* Effectuer le produit de la matrice A_p par sa transposée; effectuer le produit de la matrice B_p par sa transposée;

b. Peut-on trouver λ réel pour que les endomorphismes λf_p et λg_p soient des isométries positives de E ?

c. Les matrices A_p et B_p sont-elles inversibles? Si oui, calculer leurs inverses A_p^{-1} et B_p^{-1};

d. Montrer que l'ensemble des f_p (resp. g_p) où p décrit l'ensemble des éléments *non nuls* de E, muni de la loi de composition des applications, est un groupe.

(On précisera les transformations $f_p \circ f_q$ et $g_p \circ g_q$, q étant également un élément non nul de E.)

e. Peut-on déterminer p pour avoir $f_p = g_p$? Si oui, donner tous les éléments qui conviennent.

2° *a.* Montrer que $g_p^{-1} \circ f_p$ est une isométrie de E qui laisse stables E_1 et F.

Dans toute la fin de cette question II. 2° on suppose que $p = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4$ *est tel que* $b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$.

b. Soit h_p la restriction de $g_p^{-1} \circ f_p$ à F. Déduire de l'étude du noyau de $g_p - f_p$ un vecteur propre de h_p et la valeur propre associée.

c. En utilisant les résultats de la partie I, montrer que h_p est une rotation vectorielle de F, dont on déterminera un axe et une mesure associée à cet axe.

3° Montrer que, pour toute rotation vectorielle φ de F, il existe un élément non nul p de E tel que $\varphi = h_p$.

PARTIE III

1° *a.* Montrer que si p et q sont colinéaires non nuls :

$$h_p = h_q \quad (p \in E ; q \in E).$$

Montrer que l'on obtient tous les endomorphismes h_p étudiés à la partie II, en se limitant au cas où p est unitaire.

Tournez la page S. V. P.

SESSION DE 1975

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 5 heures

$\mathfrak{P}$ désigne l'espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ des fonctions polynômes à coefficients réels de la variable réelle x. $\mathfrak{P}^*$ désigne cet espace vectoriel privé de son vecteur nul. Pour tout entier naturel n, $\mathfrak{P}_n$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{P}$ engendré par le système $\mathcal{B} : \{x^0 = 1, x, \ldots, x^n\}$. Pour toute fonction f réelle de la variable réelle x on note : $f' = \frac{df}{dx}, \ldots, f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}$ les dérivées successives de f si elles existent et on pose $f^0 = f$.

Pour tout φ endomorphisme de $\mathfrak{P}$, donc élément de $\mathcal{L}(\mathfrak{P})$, on note $\varphi \circ \varphi = \varphi^2$ et $\varphi^n = \varphi^{n-1} \circ \varphi$, avec $\varphi^0 = \mathrm{I}$ (identité sur $\mathfrak{P}$) et, si φ est inversible, φ^{-1} désigne l'application réciproque de φ.

I

1° Montrer que l'application φ définie sur $\mathfrak{P}$ par :

$$\mathfrak{P} \longrightarrow \mathfrak{P}$$

$$\varphi : \mathrm{P} \longmapsto \mathrm{Q} \;/\; \forall x \in \mathbf{R}, \quad \mathrm{Q}(x) = \mathrm{P}\left(\frac{x}{2}\right)$$

est un automorphisme de $\mathfrak{P}$. Exprimer $\varphi^n(\mathrm{P})$, pour tout n dans $\mathbf{Z}$.

2° D désignant l'application de $\mathfrak{P}$ dans $\mathfrak{P}$ qui à toute fonction polynôme P associe sa fonction dérivée P', montrer que $\mathrm{D} \circ \varphi$ est un endomorphisme de $\mathfrak{P}$. A-t-on $\mathrm{D} \circ \varphi = \varphi \circ \mathrm{D}$?

Tournez la page S. V. P.

3° A tout polynôme P de $\mathcal{P}$ on associe par ψ la fonction R définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad R(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)}\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n P}{dx^n}\left(\frac{x}{2}\right)$$

a. Établir que ψ est un endomorphisme de $\mathcal{P}$.

b. Prouver que $\varphi^{-1} \circ \psi = (I - D)^{-1}$
puis que $\psi \circ \varphi^{-1} = (I - 2D)^{-1}$.

c. En déduire que ψ est un automorphisme de $\mathcal{P}$.

d. Donner l'élément m_{ij} ($i^{\text{ème}}$ ligne, $j^{\text{ème}}$ colonne) de la matrice M de ψ_n, restriction de ψ à $\mathcal{P}_n$ dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}_n$.

e. Déterminer l'élément m'_{ij} ($i^{\text{ème}}$ ligne, $j^{\text{ème}}$ colonne) de la matrice M^{-1}, inverse de M.

4° *a.* Montrer que la recherche des couples (λ, P) éléments de $\mathbf{R} \times \mathcal{P}^*$ vérifiant $\psi(P) = \lambda P$ équivaut à celle des couples (μ, P) éléments de $\mathbf{R} \times \mathcal{P}^*$, vérifiant la relation :

(1) $$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \mu P(x) = P(2x) - 2P'(2x)$$

b. Pour quelle valeur μ_n de μ existe-t-il au moins un polynôme de degré n vérifiant la relation (1) ?

c. On désigne par P_n le polynôme de degré n vérifiant (1) qui est normalisé, c'est-à-dire dont le terme de plus haut degré est x^n. On note :

$$P_n(x) = x^n + \sum_{p=0}^{n-1} a_p x^p$$

Montrer que l'on a, quel que soit p,

$$a_p = \frac{(-1)^{n-p} 2^{n-p} n!}{p! \prod_{i=1}^{n-p} (2^i - 1)}$$

d. Démontrer que $P^{(p)}$ et P_{n-p} sont colinéaires dans $\mathcal{P}$. En déduire que l'on a :

$$P_n(x) = P_n(0) + \sum_{p=1}^{n} C_n^p x^p P_{n-p}(0)$$

$$\left(\text{on rappelle la notation } C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}\right)$$

II

Dans cette partie on suppose $n \geqslant 2$ dans les questions 1°, 2°, 3° et $n > 2$ dans la question 4°.

1° On suppose que P_{n-1} garde un signe constant sur l'intervalle $]a, b[$ vérifiant $0 \leqslant a < \frac{b}{2} < b$ et que $P_{n-1}(b) = 0$. Comparer les signes de $P_n(b)$ et $P_n\left(\frac{b}{2}\right)$ à celui de P_{n-1} sur $]a, b[$.

2° On se propose d'établir que P_n possède n racines réelles x_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, vérifiant $0 < x_i < \frac{x_{i+1}}{2}$ pour $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

On montrera que, entre deux racines consécutives de P_{n-1}, il existe au moins une racine de P_n, et l'on terminera la démonstration (préciser nettement l'hypothèse de récurrence éventuelle).

3° Soit q_n le nombre de racines de P_n supérieures à 2. Montrer que l'on a $2^{q_n} < 2n$.

En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{q_n}{n} = 0$.

4° On désigne par r_n la plus petite racine de P_n.

a. Montrer que : $r_n < \frac{1}{2} r_{n-1}$ et $r_n < \frac{1}{2^{n-2}}$

b. On pose $p_n(x) = a_0 + a_1 x$ et l'on désigne par t_n la racine de p_n.

Montrer que $P_n(x) - p_n(x)$ garde un signe constant sur $]0, r_{n-1}[$.

En déduire que l'on a $t_n < r_n$ et que P_n a une racine unique sur $\left]0, \frac{1}{2^{n-2}}\right[$.

c. Étudier l'existence et la valeur éventuelle de $\lim\limits_{n \to +\infty} (r_n)^{\frac{1}{n}}$.

5° On se propose de trouver un équivalent de r_n pour n infiniment grand.

a. On donne la série entière de terme général $\omega_m(x) = \dfrac{(-1)^m x^m}{m!\,(\sqrt{2})^{m^2}}$.

On désigne par $F(x)$ la somme, quand elle existe, de cette série.

Montrer que :

α. cette série entière a un rayon de convergence infini;

β. $\forall x \in [0, \sqrt{2}]$, $\quad F(x) > 0$

γ. $F(2\sqrt{2}) < 0$

δ. la fonction F est dérivable et l'on a :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad F'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} F\left(\frac{x}{2}\right)$$

Déduire de l'étude précédente l'existence et l'unicité du réel α vérifiant :

$$\begin{cases} \alpha \in]0, 2\sqrt{2}[\\ F(\alpha) = 0 \end{cases}$$

b. Montrer que :

$$\forall m \in \mathbf{N}^*, \quad \mathrm{Log}\left(1 - \frac{1}{2^m}\right) > \frac{-1}{2^{m-1}}$$

(Log x désigne le logarithme népérien de x). En déduire que la suite (u_m) définie par : $\quad u_0 = 1$

$$\forall m \in \mathbf{N}^*, \quad u_m = \frac{1}{\prod_{i=1}^{m}\left(1 - \frac{1}{2^i}\right)}$$

admet une limite l_0 non nulle.

c. Étant donné une suite réelle (v_m) et une série entière de rayon de convergence infini $G(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$, on pose :

$$Q_m(x) = v_0 c_m x^m + v_1 c_{m-1} x^{m-1} + \dots + v_p c_{m-p} x^{m-p} + \dots + v_{m-1} c_1 x + v_m c_0$$

$$= \sum_{p=0}^{m} v_p c_{m-p} x^{m-p}$$

A désignant un réel strictement positif, montrer que si $\lim_{m \to +\infty} v_m = 0$, alors la suite de fonctions Q_m converge uniformément vers la fonction nulle sur $[-A, +A]$, c'est-à-dire que l'on a :

$$(\forall \varepsilon \in \mathbf{R}^{+*})\ (\exists M \in \mathbf{N})\ /$$
$$(\forall m \in \mathbf{N},\ m > M)\ (\forall x \in [-A, +A])\ (\,|Q_m(x)| < \varepsilon)$$

En déduire que si $\lim_{m \to +\infty} v_m = l \neq 0$, la suite de fonctions $Q_m - lG$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[-A, +A]$. On dit que la suite Q_m converge uniformément vers la fonction lG sur $[-A, A]$.

d. On définit B_n par $B_n(x) = \dfrac{(-1)^n (\sqrt{2})^{n^2-n}}{n!} P_n\left(\dfrac{x}{(\sqrt{2})^{2n-1}}\right)$

α. Établir que la suite de fonctions B_n converge uniformément vers $l_0 F$ sur $[0, 2\sqrt{2}]$.

β. Vérifier que B_n a un zéro unique α_n dans l'intervalle $]0, 2\sqrt{2}[$. Quelle relation lie α_n et r_n?

α étant le réel défini en 5°*a*.δ., démontrer que l'on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \alpha_n = \alpha.$$

En déduire un équivalent de r_n pour n infiniment grand.

CAPES 1975 ALGEBRE GEOMETRIE
composition 2

a) Notations du problème.

R et **C** désignent respectivement le corps des réels et le corps des complexes.
. i est le complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$.

$\overline{Z}$ est le conjugué du complexe z.

$\mathbf{C}^2$ est l'ensemble des couples de complexes; si X et Y sont deux éléments de cet ensemble, on les note respectivement :

$$X = (x,x') \qquad \text{et} \qquad Y = (y,y')$$

Avec

$$\begin{cases} x = a_1 + ia_2 \\ x' = a_3 + ia_4 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} y = b_1 + ib_2 \\ y' = b_3 + ib_4 \end{cases}$$

Où $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4$ sont réels.
X étant élément de $\mathbf{C}^2$, $\overline{X}$ désigne l'élément $\overline{X} = (\overline{x}, \overline{x}')$

b) Rappels

Etant donné Ω_1 et Ω_2 , sous espaces supplémentaires d'un espace vectoriel E, on considère la décomposition de tout vecteur V de E en :

$$V = V_1 + V_2$$

avec $V_1 \in \Omega_1$ et $V_2 \in \Omega_2$

On appelle « symétrie par rapport à Ω_1 suivant Ω_2 » l'application de E dans E définie par :

$$\begin{cases} E \longrightarrow E \\ V \longrightarrow V' = V_1 - V_2 \end{cases}$$

I - PREMIERE PARTIE

1°) On munit $\mathbf{C}^2$ des lois habituelles d'addition et de multiplication par un réel.

Démontrer que ($\mathbf{C}^2$, + , .) ainsi obtenu est un espace vectoriel sur **R**,
On notera E cet espace vectoriel, déterminer la dimension de E.

2°) On désigne par P et par Q les ensembles des vecteurs de E correspondant respectivement à :

$$a_2 = a_4 = 0 \qquad \text{et} \qquad a_1 = a_3 = 0$$

Démontrer que P et Q sont des plans vectoriels (sous-espaces de dimension 2)

Démontrer que : $E = P \oplus Q$

Si l'on pose :

$e_1 = (1, 0)$; $e_2 = (i, 0)$; $e_3 = (0, 1)$; $e_4 = (0, i)$,

démontrer que (e_1, e_2, e_3, e_4) constitue une base A de E.

3°) On considère l'application ψ de E dans E définie par :

$$\psi \begin{cases} E \longrightarrow E \\ X \longrightarrow \psi(X) = \overline{X} \end{cases}$$

Démontrer que ψ est un automorphisme involutif de E.

II - DEUXIEME PARTIE

1°) on considère l'application f définie par :

$$f \begin{cases} E \times E \to \mathbf{R} \\ (X, Y) \to f(X,Y) = \mathcal{R}\ (xy + x'y') \end{cases}$$

c'est à dire que f(X, Y) est la partie réelle du complexe $xy + x'y'$.

a) Démontrer que f est une forme bilinéaire symétrique sur E.
Est ce un produit scalaire ?

b) On dit que X et Y sont conjugués par rapport à f si et seulement si, f(X, Y) est nul
Démontrer que l'ensemble des vecteurs de E conjugués par rapport à f d'une famille donnée de vecteurs de E constitue un sous espace-vectoriel de E.

Deux sous-espaces de E, E_1 et E_2 sont dits conjugués par rapport à f si tout X_1 de E_1 et tout X_2 de E_2 sont conjugués par rapport à f.
Démontrer que P et Q sont conjugués par rapport à f.

c) On note G l'ensemble des vecteurs de E qui sont conjugués d'eux-mêmes par rapport à f.
Démontrer que G n'est pas un sous-espace vectoriel.

d) déterminer $P \cap G$ et $Q \cap G$.

2°) On considère l'application φ définie par :

$$\varphi \begin{cases} E \times E \to R \\ (X, Y) \to \varphi(X,Y) = f(X, \overline{Y}) \end{cases}$$

Démontrer que φ est un produit scalaire sur E.

Dans toute la suite du problème on considère l 'espace euclidien (E, φ).

Démontrer que A est une base orthonormée.
Préciser la définition géométrique de l'application ψ rencontrée en I, 3°.

3°) 0n pose :

$$\varepsilon_1 = \frac{(e_1 + e_2)}{\sqrt{2}} \qquad \varepsilon_2 = \frac{(e_1 - e_2)}{\sqrt{2}}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{(e_3 + e_4)}{\sqrt{2}} \qquad \varepsilon_4 = \frac{(e_3 - e_4)}{\sqrt{2}}$$

Démontrer que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ constitue une base orthonormée B de E.

On désigne respectivement par :
(u_1, u_2, u_3, u_4) et (v_1, v_2, v_3, v_4) les composantes de X et Y dans B.

Exprimer f dans B.
Former l'équation de G dans B.

4°) 0n considère les deux sous-espaces vectoriels de E (Hyperplans, de dimensions 3) ayant respectivement pour équations :

$\alpha u_1 - \beta u_3 = 0$ et $\alpha u_4 + \beta u_2 = 0$

où (α,β) est un couple de réel différent de (0,0)

a) Démontrer que l'intersection de ces hyperplans vectoriels est un plan vectoriel Π; on désigne par F la famille de tels plans vectoriels.
Démontrer que Π décrit G quand (α,β) décrit $\mathbf{R}^2 - (0,0)$.

b) Démontrer que G peut être engendré par les plans vectoriels Π ' d'une seconde famille F ' que l'on précisera..

c) Démontrer que l'intersection d'un plan vectoriel Π avec un plan vectoriel Π ' est une droite vectorielle que l'on déterminera.

d) Π et Π ' étant fixés dans leurs familles respectives, démontrer qu'ils ne sont pas orthogonaux, mais que Π contient une droite vectorielle Δ unique orthogonale à Π '.
Démontrer que, Π ' restant fixe et Π décrivant F, Δ engendre un plan vectoriel de F ' , orthogonal à Π '.

III – TROISIEME PARTIE

Si X et Y sont deux vecteurs de E à la fois conjugués par rapport à f et orthogonaux, on dit qu'ils sont ortho-conjugués.

1°) Démontrer que A est une base ortho-conjuguée mais que B n'en est pas une.

2°)Si X est un élément fixé dans E, démontrer que l'ensemble des éléments ortho-conjugués de X est un sous espace vectoriel T_x de E dont on discutera la dimension.

3°) on suppose X choisi de telle manière que T_x soit un plan vectoriel.
Démontrer alors que, si Y décrit T_x , T_y contient un plan vectoriel qui ne dépend pas du choix de Y.

IV – QUATRIEME PARTIE

On se propose de visualiser une partie des résultats précédents.
On envisage un espace affine euclidien E associé au point O et à l'espace vectoriel E. on désigne par (O, A_1, A_2, A_3, A_4) le repère de E associé à la base A de E.
A tout vecteur X de E on associe le point M de E de coordonnées (a_1, a_2, a_3, a_4).
On désigne par G l'image de G dans E

1°) Démontrer que l'intersection de G et du sous-espace affine ayant (O, A_1, A_2, A_3, A_4) pour repère est un cône de révolution C que l'on précisera.
Déterminer les plans de symétrie de C

2°)On désigne par L l'hyperplan affine dont l'équation est a_4=1
on pose U = G $\cap$ L

a) démontrer que U est une surface de révolution dont on déterminera une courbe méridienne.
Représenter U par un dessin en perspective cavalière ou par une épure.

b) Etudier la nature de la section de U par un plan variable contenant O et A_1
c) Démontrer qu'il existe deux droites de U situées dans l'hyperplan affine ayant pour équation a_3 = 1.
Soit D l'une de ces droites : étudier l'intersection de U et d'un plan variable contenant D.

3°) On désigne par H_k l'ensemble des vecteurs X de E qui vérifient la relation

$$f(X, X) = k$$

où k est un réel

H_k est l'image de H_k dans E..

a) Démontrer que si k est non nul, H_k ne contient aucun sous-espace vectoriel de E.

b) Pour kk' > 0 donner une transformation simple qui fasse passer de H_k à $H_{k'}$.

c) On désigne par S_k l'intersection de H_k et de l'hyperplan affine dont l'équation est $a_4 = 0$

d)
Démontrer que S_k est une surface de révolution dont on précisera l'axe et une courbe méridienne.

Représenter dans un plan méridien les différentes formes des courbes méridiennes et leur position relatives suivant les valeurs de k.

Représenter par un dessin en perspectives cavalière où par une épure l'ensemble des trois surfaces S_{-1} , S_0 , et S_1 limitées aux hyperplans ayant pour équation respectives $a_2 = -2$ et $a_2 = 2$.

4°) Déterminer l'intersection avec L des plans situés dans G et montrer que U est engendrée par l'une ou l'autre de deux familles de droites.

SESSION DE 1976

—

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 5 heures

Dans tout le problème, les lettres m, n et i désignent des nombres entiers naturels, la lettre x désigne un nombre réel. Les polynômes intervenant ici sont des polynômes à une indéterminée (qui sera notée X) sur le corps des réels $\mathbb{R}$. Ainsi, un polynôme pourra être noté indifféremment P ou P (X). *La fonction polynôme associée à un polynôme* P *sera également désignée par* P.

Les résultats figurant dans l'énoncé pourront être utilisés pour poursuivre le problème, même s'ils n'ont pas été établis.

Première partie

1° Démontrer, lorsque n est un entier naturel quelconque, l'existence d'un polynôme T_n tel que

(1) $$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos \theta) = \cos n\theta .$$

Expliciter T_0, T_1, T_2, T_3, T_4.

2° *a.* Démontrer que l'on a, pour tout $n \geqslant 2$,

$$T_n(X) + T_{n-2}(X) = 2X\,T_{n-1}(X)$$

En déduire, pour n donné, l'unicité de T_n vérifiant (1).

b. Démontrer que l'on a, pour toute valeur de l'entier n

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\operatorname{ch} \theta) = \operatorname{ch} n\theta .$$

c. Calculer le terme de plus haut degré de T_n.

Étudier la parité de T_n.

d. Démontrer que, si $|x| > 1$, alors $|T_n(x)| > 1$ $n \geqslant 1$

Tournez la page S. V. P.

3° Dans cette question, l'entier n est supposé non nul.

a. Démontrer que les zéros du polynôme T_n sont tous réels et distincts et qu'ils appartiennent à l'intervalle $[-1, 1]$. (Par la suite, ils seront notés x_i avec $1 \leqslant i \leqslant n$, de sorte que la suite des x_i soit strictement décroissante).

b. Résoudre sur le corps des réels l'équation

$$|T_n(x)| = 1 .$$

On précisera le nombre de racines distinctes et la disposition relative des racines des équations $T_n(x) = +1$ et $T_n(x) = -1$.

4° *a.* Démontrer que le polynôme X^{2p} (respectivement X^{2p+1}) est combinaison linéaire des polynômes T_{2p} (respectivement T_{2p+1}), avec $0 \leqslant p \leqslant n$, p entier naturel.

b. Exprimer X, X^2, X^3, X^4 comme combinaisons linéaires de T_0, T_1, T_2, T_3, T_4.

5° Pour $|x| \leqslant 1$ et t réel, on considère la fraction rationnelle φ_x définie par

$$\varphi_x(t) = \frac{1 - xt}{1 - 2xt + t^2}$$

a. Démontrer que $\varphi_x(t)$ est développable en série entière de t. Préciser le rayon de convergence.

b. Démontrer que

$$\varphi_x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n\,T_n(x) .$$

Deuxième partie

E désigne l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ continues sur le segment $[-1, 1]$.

Dans cette deuxième partie, l'entier n est supposé non nul.

$\mathcal{P}_n$ désigne l'ensemble des polynômes de degré n, $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des polynômes de degré n normalisés, c'est-à-dire dont le coefficient du terme de plus haut degré est 1.

On pose, pour $f \in E$,

$$\|f\| = \sup_{x \in [-1, 1]} |f(x)| .$$

1° On pose

$$T_n^\circ = \frac{T_n}{2^{n-1}}$$

Calculer $\| T_n^\circ \|$.

2° Soit Π un élément de $\mathcal{B}_n$. En raisonnant sur le nombre de zéros du polynôme $T_n^\circ - \Pi$, démontrer qu'il est impossible que $\| \Pi \| < \| T_n^\circ \|$.

On a donc

$$\forall \Pi \in \mathcal{B}_n, \qquad \| \Pi \| \geq \| T_n^\circ \|.$$

3° Étant donné un élément f de E, s'il existe un élément P de $\mathcal{P}_n$ tel que

$$\forall Q \in \mathcal{P}_n, \qquad \| f - Q \| \geq \| f - P \|,$$

on dira que P est « une meilleure approximation polynômiale de degré n de f, uniforme sur $[-1, 1]$ ». (*On ne se préoccupera ni de l'existence, ni de l'unicité d'une telle approximation*).

Écrire le polynôme $X^3 - X^2$ comme combinaison linéaire des polynômes T_i. En déduire une meilleure approximation polynômiale ψ de degré 2 de g, uniforme sur $[-1, 1]$, avec

$$g(x) = x^3 - x^2.$$

Représenter sur un même graphique, si possible avec des couleurs différentes, les restrictions de g et de ψ au segment $[-1, 1]$.

Troisième partie

E et $\| f \|$, pour $f \in E$, ont la même signification que dans la deuxième partie.

1° Soit f un élément de E. Démontrer que l'intégrale

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

est convergente.

2° Calculer

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^n\, dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3° *a.* Calculer

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)\, T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

b. Démontrer que

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^n\, T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = 0 \qquad \text{si } n < m.$$

4° On désigne par x_1, x_2, x_3 les zéros de T_3 [Cf. Première partie, 3° *a.*] et par A_1, A_2, A_3 trois nombres réels. Pour tout f élément de E, on définit R(f) par

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3) + R(f).$$

a. Déterminer A_1, A_2, A_3 pour que $R(P) = 0$ pour toute fonction polynôme P de degré inférieur ou égal à 2.

b. Démontrer que si l'on donne à A_1, A_2, A_3 les valeurs ainsi trouvées, $R(P) = 0$ pour toute fonction polynôme P de degré inférieur ou égal à 5. (On pourra utiliser une division euclidienne par T_3).

5° Justifier l'existence de

$$\int_0^1 \frac{x^4\, dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

Calculer cette intégrale.

6° Pour n fixé non nul, on désigne maintenant par x_i $(1 \leq i \leq n)$ les zéros de T_n [Cf. Première partie, 3° *a.*] et par A_i^{n} $(1 \leq i \leq n)$ des nombres réels. On pose, pour tout f élément de E,

(2) $$S_n(f) = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$$

(3) $$R_n(f) = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx - S_n(f).$$

a. Démontrer qu'on peut déterminer les A_i de manière unique de sorte que, pour toute fonction polynôme P de degré inférieur ou égal à $(n-1)$, $R_n(P)$ soit nul.

b. Démontrer qu'alors

$$\forall i \in [1, n] \cap \mathbb{N}, \qquad A_i = \frac{\pi}{n}.$$

Tournez la page S. V. P.

c. Démontrer également qu'alors, pour toute fonction polynôme P de degré inférieur ou égal à $(2n-1)$, $R_n(P)$ est nul.

7° On se donne f, élément quelconque de E, et, *pour chaque valeur non nulle de n, on définit* $S_n(f)$ et $R_n(f)$ *par les formules* (2) *et* (3), *les* A_i *satisfaisant à la condition énoncée en* 6° *a.* Démontrer que

$$\lim_{n \to +\infty} S_n(f) = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx .$$

(On pourra admettre sans démonstration que, pour tout réel ε strictement positif donné, il existe une fonction polynôme P telle que

$$\| f - P \| < \varepsilon$$

et remarquer que $R_n(P) = 0$ si $n >$ degré de P.)

CAPES 76 — je ne sais plus de quand ?

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Sujet (durée : 5 heures)

PRÉAMBULE

Dans tout le problème, V désigne un espace vectoriel euclidien de dimension 2 ou 3 ; on note $\| \; \|$ la norme associée au produit scalaire défini sur V.

$\mathcal{O}(V)$ désigne le groupe orthogonal de V. *On se propose d'étudier les sous-groupes finis (c'est-à-dire n'ayant qu'un nombre fini d'éléments) de* $\mathcal{O}(V)$.

On rappelle que l'*ordre* d'un groupe fini est le nombre de ses éléments et qu'un groupe fini est *cyclique* lorsqu'il est engendré par un de ses éléments.

Le cardinal d'un ensemble X sera noté card X.

On dit qu'une bijection f d'un ensemble X sur lui-même *laisse invariant* ou *conserve* un sous-ensemble Y de X lorsque $f(Y) = Y$.

On rappelle que f^{-1} désigne la bijection réciproque de f.

Par abréviation, une symétrie vectorielle de V sera appelée symétrie et une rotation vectorielle de V sera appelée rotation. L'identité de V, notée Id_V, est considérée comme une rotation particulière de V. De même l'identité d'un espace affine $\mathcal{V}$ est considérée comme une rotation (affine) particulière de $\mathcal{V}$.

Le symbole $\circ$ est celui de la composition des applications. Quand il sera question de groupe, on sous-entendra « pour la loi $\circ$ ».

On rappelle enfin que tout espace vectoriel V peut être muni d'une structure d'espace affine sur lui-même. On pourra donc parler indifféremment de vecteurs ou de points pour désigner les éléments de V et on *représentera les situations rencontrées dans V par des figures.*

CAPES EXTERNE DE MATHEMATIQUES

SESSION DE 1976

DEUXIEME COMPOSITION
DE MATHEMATIQUES
Durée: 5h.

PREAMBULE

Dans tout le problème, V désigne un espace vectoriel euclidien de dimension 2 ou 3; on note $\| \;\|$ la norme associée au produit scalaire défini sur V.

$\mathcal{O}(V)$ désigne le groupe orthogonal de V. *On se propose d'étudier les sous-groupes finis (c'est à dire n'ayant qu'un nombre fini d'éléments)* de $\mathcal{O}(V)$.

On rappelle que l'*ordre* d'un groupe fini est le nombre de ses éléments et qu'un groupe fini est *cyclique* lorsqu'il est engendré par un de ses éléments.

Le cardinal d'un ensemble X sera noté $\operatorname{card} X$.

On dit qu'une bijection f d'un ensemble X sur lui-même laisse *invariant* ou *conserve* un sous-ensemble Y de X lorsque $f(Y) = Y$.

On rappelle que f^{-1} désigne la bijection réciproque de f.

Par abréviation une symétrie vectorielle de V sera appelée symétrie et une rotation vectorielle de V sera appelée rotation. L'identité de V, notée Id_V, est considérée comme une rotation particulière de V. De même l'identité d'un espace affine $\mathcal{V}$ est considérée comme une rotation(affine) particulière de $\mathcal{V}$.

Le symbole $\circ$ est celui de la composition des applications. Quand il sera question de groupes, on sous-entendra "pour la loi $\circ$" .

On rappelle enfin que tout espace vectoriel V peut être muni d'une structure d'espace affine sur lui-même. On pourra parler indifféremment de vecteurs ou de points pour désigner les éléments de V et *on représentera les situations rencontrées dans V par des figures.*

Première partie

Dans cette partie la dimension de V est 2

A

Soit $\mathcal{V}$ un espace affine dont l'espace vectoriel associé est V. Dans $\mathcal{V}$ rapporté à un repère orthonormé, on considère le carré $ABCD$ dont les sommets ont pour coordonnées respectives $(1,1)$, $(-1,1)$ $(-1,-1)$ et $(1,-1)$.

1° Démontrer que toute isométrie affine de $\mathcal{V}$, conservant l'ensemble des points $\{A, B, C, D\}$ laisse invariant le point O, origine du repère et que l'ensemble $\mathcal{D}$ de ces isométries est d'une part isomorphe à un sous-groupe de $\mathcal{O}(V)$, d'autre part à un sous-groupe du groupe des permutations à 4 éléments.

2° Trouver un sous-groupe cyclique d'ordre 4 de $\mathcal{D}$.

3° Démontrer que $\mathcal{D}$ est engendré par deux symétries orthogonales par rapport à des droites que l'on précisera.

B

On donne un sous-groupe fini de $\mathcal{O}(V)$, soit $\mathcal{G}$, et on appelle $\mathcal{H}$ l'ensemble des rotations appartenant à $\mathcal{G}$.
1° Démontrer que $\mathcal{H}$ constitue un sous-groupe de $\mathcal{G}$.
2° A toute rotation R de V on associe le réel $\theta(R)$, appartenant à l'intervalle $]0, 2\pi]$, qui détermine l'angle de la rotation R est est appelé *mesure* de R. On aura en particulier ici pour mesure de la rotation identité de $V (Id_V)$ le nombre 2π. Démontrer qu'il existe un élément R_1 de $\mathcal{H}$ dont la mesure est minimale, c'est à dire vérifie

$$\forall R \in \mathcal{H}, \quad \theta(R) \geq \theta(R_1).$$

Démontrer que, pour tout $R \in \mathcal{H}$, il existe un entier naturel m tel que $\theta(R) = m\theta(R_1)$. En déduire que $\mathcal{H}$ est un sous-groupe cyclique dont R_1 est un générateur.

Exprimer $\theta(R_1)$ en fonction de l'ordre n de $\mathcal{H}$.

3° Déterminer un ensemble Λ d'éléments de V tel que $\mathcal{H}$ constitue l'ensemble des rotations de V laissant Λ invariant.

Donner en fonction de n le nombre minimum d'éléments de Λ.

4° On suppose $\mathcal{H} \neq \mathcal{G}$ et on désigne par S une symétrie orthogonale donnée appartenant à $\mathcal{G}$.

On désigne par $S\,\mathcal{H}$ l'ensemble, noté $\{S \circ R \mid R \in \mathcal{H}\}$, des $S \circ R$ tels que $R \in \mathcal{H}$.

a. Démontrer que $S\,\mathcal{H}$ ne contient que des symétries orthogonales.

b. Démontrer que l'on a

$$\mathcal{G} = \mathcal{H} \cup S\mathcal{H}.$$

c. Exprimer les éléments de $\mathcal{G}$ en fonction de S et R_1.

5° Démontrer qu'il existe deux types de sous-groupes finis de $\mathcal{O}(V)$ et en préciser la nature.

6° On reprend la situation du paragraphe 4° ci-dessus.

Soit (u_1, u_2) une base orthonormée de vecteurs propres de S; donner dans cette base les matrices de S, R_1 et $T = R \circ S$ (on appelle toujours n l'ordre de $\mathcal{H}$).

Caractériser T et démontrer que $\mathcal{G}$ admet un système de générateurs constitué par des symétries orthogonales que l'on précisera.

7° V étant rapporté à la base (u_1, u_2) utilisée ci-dessus, et x étant un élément non nul de V, on désigne par $Arg(x)$, la mesure de l'angle (u_1, x), nombre réel appartenant à $]0, 2\pi]$. On pose

$$F = \{x \in V \mid 0 < Arg(x) < \tfrac{\pi}{4}\}.$$

En supposant que $n = 4$, représenter sur un dessin F et ses images respectives par .. T, $T \circ S$, $S \circ T \circ S \circ T$, $S \circ T \circ S$, $S \circ T$ et S.

Deuxième partie

Dans cette partie la dimension de V est 3

Soit $\mathcal{V}$ un espace affine dont l'espace vectoriel associé est V. Dans $\mathcal{V}$ rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'0x$, $y'0y$, $z'0z$, on désigne par Σ la sphère de rayon 1 centrée à l'origine du repère et par Γ le cube $ABCDA'B'C'D'$, les trois coordonnées de chaque sommet appartenant à l'ensemble $\{-1, 1\}$. Dessiner le cube Γ.

1° Démontrer que toute rotation affine de $\mathcal{V}$ conservant l'ensemble des sommets de Γ laisse invariant le point O; justifier rapidement le fait que l'ensemble $\mathcal{H}_\Gamma$ de ces rotations constitue un sous-groupe fini, isomorphe d'une part à un sous-groupe de $\mathcal{O}(V)$, d'autre part à un sous-groupe du groupe des permutations à 8 éléments.

Soient deux sommets appartenant à une même arête du cube Γ. Démontrer que la seule rotation affine appartenant à $\mathcal{H}_\Gamma$ et laissant invariant chacun de ces deux sommets est l'identité de $\mathcal{V}$. En déduire que le nombre d'éléments de $\mathcal{H}_\Gamma$ est au plus 24.

2° Démontrer que l'ensemble des éléments de $\mathcal{H}_\Gamma$ qui laissent invariant un sommet donné de Γ constitue un sous-groupe d'ordre 3 de $\mathcal{H}_\Gamma$.

On rappelle que l'*ordre d'un élément* g d'un groupe fini est le plus petit entier q strictement positif tel que g^q (composé de q éléments égaux à g) soit l'élément neutre du groupe. Déterminer tous les éléments d'ordre 3 de $\mathcal{H}_\Gamma$.

3° Décrire tous les éléments d'ordre 4 de $\mathcal{H}_\Gamma$, puis les éléments d'ordre 2 de $\mathcal{H}_\Gamma$.

Décrire tous les éléments de $\mathcal{H}_\Gamma$.

4° On appelle *pôle* d'une rotation de $\mathcal{V}$ (autre que l'identité de $\mathcal{V}$ tout point d'intersection de la sphère Σ et de l'axe de cette rotation. Représenter sur un dessin la portion du cube Γ et de la portion de la sphère Σ situées dans la région de $\mathcal{V}$ définie par $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$, ainsi que les demi-axes des rotations appartenant à $\mathcal{H}_\Gamma$ qui sont situés dans cette région et les pôles appartenant à ces demi-axes.

On désigne par $\mathcal{P}$ l'ensemble des pôles des rotations (autres que l'identité de $\mathcal{V}$ appartenant à $\mathcal{H}_\Gamma$.

a. Calculer card $\mathcal{P}$.

b. Démontrer que $\mathcal{P}$ est invariant par toute rotation appartenant à $\mathcal{H}_\Gamma$ et qu'il en est de même de l'ensemble des pôles des éléments d'ordre 4 de $\mathcal{H}_\Gamma$

c. Démontrer que l'on peut déterminer un ensemble $\{P_1,\ P_2,\ P_3\}$ de pôles éléments de $\mathcal{P}$ tels que si Ω_i désigne l'ensemble des images de P_i par tous les éléments de $\mathcal{H}_\Gamma$, l'on ait

$\alpha.$ $\qquad \mathcal{P} = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$

et

$\beta.$ $\qquad \Omega_j \cap \Omega_k = \emptyset \quad \text{si } j \neq k,$

i, j et k étant éléments de $\{1,\ 2,\ 3\}$.

(Ω_i sera appelé *orbite* de P_i.)

d. Calculer l'ordre des sous-groupes de $\mathcal{H}_\Gamma$ qui laissent invariants P_1, P_2 et P_3 respectivement. Quelle relation existe-t-il entre l'ordre de $\mathcal{H}_\Gamma$, le cardinal de Ω_i et l'ordre du sous-groupe de $\mathcal{H}_\Gamma$ qui laisse P_i invariant?

Troisième partie

Dans cette partie la dimension de V est 3

A

$\mathcal{G}$ désigne un groupe fini de $\mathcal{O}(V)$ et $\mathcal{H}$ est l'ensemble des rotations de $\mathcal{G}$.
On suppose $\mathcal{H} \neq \mathcal{G}$.

1° Démontrer qu'on peut trouver un élément S de $\mathcal{G}$ tel que

$$\mathcal{G} = \mathcal{H} \cup \ \mathcal{S}\mathcal{H}.$$

(On rappelle la notation $S\,\mathcal{H} = \{S \circ R \mid R \in \mathcal{H}\}$.)

Caractériser S, puis montrer que $\mathcal{H}$ est un sous-groupe distingué de $\mathcal{G}$.

2° Soit σ la sphère unité de V, $\sigma = \{x \in V \mid \ \| x \| = 1\}$.
Démontrer que si R est une rotation distincte de Id_V, il existe deux éléments, et deux seulement x_1 et x_2, de σ, qui sont invariants par R; x_1 et x_2 sont appelés *pôles* de R.

3° Démontrer que si x est un pôle d'une rotation R appartenant à $\mathcal{H}$, alors, pour tout élément $T \in \mathcal{G}$, $T(x)$ est pôle d'une rotation R' que l'on précisera.

4° On appelle *stabilisateur* d'un élément x de V l'ensemble $\mathcal{H}_x$ des éléments de $\mathcal{H}$ laissant x invariant et *orbite* de x l'ensemble Ω_x des images de x par les éléments de $\mathcal{H}$.
On désigne par n l'ordre de $\mathcal{H}$.
On se donne x, pôle d'une rotation appartenant à $\mathcal{H}$ et on considère l'application

$$\varphi_x : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \to & \Omega_x \\ R & \mapsto & R(x) \end{array} \right.$$

et la relation γ définie par

$$(R_1 \ \gamma \ R_2) \ \Leftrightarrow \ R_2^{-1} \circ R_1 \in \mathcal{H}_x.$$

a. Vérifier que γ est une relation d'équivalence, et, en utilisant φ_x, que l'ensemble quotient $\mathcal{H}/\gamma$ peut être mis en bijection avec Ω_x.
En déduire que l'on a

$$n = n_x \ \nu_x$$

en posant $n_x = \text{card } \mathcal{H}_x$ et $nu_x = \text{card } \Omega_x$

b. On désigne par $\mathcal{U}$ l'ensemble des couples (R, x) où R est un élément de $\mathcal{H}$ autre que Id_V et où x est un pôle de R. Démontrer que

$$\text{card } \mathcal{U} = 2(n-1).$$

5° On suppose que l'ensemble des pôles des éléments de $\mathcal{H}$ contient k orbites distintes, on choisit un pôle sur chaque orbite et on obtient ainsi un ensemble de points $\{x_1,\ x_2, \dots, x_n\}$. Démontrer que l'on a

$$\operatorname{card} \mathcal{U} = \sum_{j=1}^{k} n_j(\nu_j - 1)$$

où l'on a posé, pour alléger les notations,

$$\nu_{x_j} = \nu_j \quad \text{et} \quad n_{x_j} = n_j.$$

6° Démontrer que l'on a

$$2 - \frac{2}{n} = \sum_{j=1}^{k} (1 - \frac{1}{n_j}) \quad \text{et} \quad k \neq 1.$$

7° Démontrer que les seules valeurs éventuelles de k sont 2 et 3.

8° Démontrer que si $k = 2$, alors $\mathcal{H}$ est un groupe cyclique.

9° On suppose maintenant que l'on a $k = 3$ et, pour fixer les notations, on pose

$$n_1 \leq n_2 \leq n_3.$$

Etablir les résultats suivants:

a. $n_1 = 2$
b. $n_2 \in \{2,\ 3\}$
c. si $n_2 = 3$, alors $n_3 \in \{3,\ 4,\ 5\}$.

10° Démontrer que si l'on a

$$\begin{cases} n_1 = 2 \\ n_2 = 3 \\ n_3 = 4, \end{cases}$$

alors $\mathcal{H}$ est isomorphe au groupe $\mathcal{H}_\Gamma$ de la deuxième partie du problème.

11° Pouvez-vous décrire les ensembles de points (sommets de polyèdres réguliers jouant un rôle analogue à celui des sommets) à celui des sommets) $A\,B\,C\,D\,A'\,B'\,C'\,D'$ du cube Γ(cf. deuxième partie du problème) pour les éventualités:

a. $n_1 = 2, \quad n_2 = n_2 = 3$
b. $n_1 = 2,\ n_2 = 3,\ n_3 = 5$?

B

1° Soit $\mathcal{K}$ un groupe de rotations de V. On désigne par $-E$ la composée d'un endomorphisme E de V et de l'homothéthie de V dont le rapport est -1. On considère l'ensemble

$$\tilde{\mathcal{K}} = \mathcal{K} \cup \{-R \mid R \in \mathcal{K}\}.$$

Démontrer que $\tilde{\mathcal{K}}$ constitue un groupe dont le sous-groupe des rotations est $\mathcal{K}$.

2° $\mathcal{J}$ étant un sous-groupe de $\mathcal{K}$ et R_1 un élément de $\mathcal{K}$ $(R_1 \notin \mathcal{J}\}$, on pose

$$R_1\mathcal{J} = \{R_1 \circ R \mid R \in \mathcal{J}\}.$$

On suppose que $\mathcal{J}$ est tel que

$$\mathcal{K} = \mathcal{J} \cup R_1\,\mathcal{J}$$

Démontrer que l'ensemble

$$\widehat{\mathcal{J}} = \mathcal{J} \cup \{-R \in R_1\,\mathcal{J}\}$$

constitue un groupe dont $\mathcal{J}$ est le sous-groupe des rotations.

3° On revient à la situation du début de la troisième partie: $\mathcal{G}$ est un sous-groupe fini de $\mathcal{O}(V)$, $\mathcal{H}$ le sous-groupe des rotations de $\mathcal{G}$ $(\mathcal{H} \neq \mathcal{G})$ et S un élément de $\mathcal{G}$ tel que $\mathcal{G} = \mathcal{H} \cup S\mathcal{H}$.
Démontrer que $S^2 \in \mathcal{H}$.
Démontrer que l'ensemble

$$\mathcal{L} = \mathcal{H} \cup (-S)\,\mathcal{H}$$

constitue un sous-groupe des rotations de V.

4° Donner le catalogue des sous-groupes finis de $\mathcal{O}(V)$.

–:–:–:–:

CAPES EXTERNE DE MATHEMATIQUES

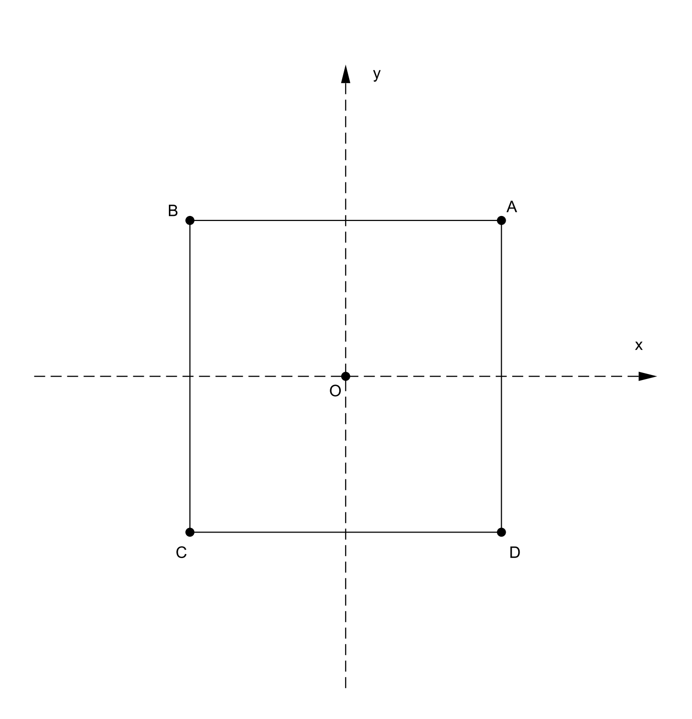
SESSION DE 1976

DEUXIEME COMPOSITION
DE MATHEMATIQUES
Corrigé par Monique Decauwert

Première partie

A





1° Une isométrie affine, comme toute application affine, conserve le barycentre. En conséquence O étant l'isobarycentre de $\{A, B, C, D\}$, si f est une isométrie affine conservant globalement $\{A, B, C, D\}$, elle vérifie $f(O) = O$.
On a d'autre part un isomorphisme canonique entre $O(V)$ et le groupe des isométries laissant O invariant, $\mathcal{D}$ est donc isomorphe à un sous-groupe de $\mathcal{O}(V)$.
Par ailleurs tout élément de $\mathcal{D}$ induit une permutation de l'ensemble $\{A, B, C, D\}$. On en déduit un homomorphisme de groupes de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{S}_4$. Ce dernier est injectif, car une application affine est déterminée par l'image de O, A et B, qui à eux trois constituent un repère affine.

2° La rotation R de centre O, d'angle de mesure $+\frac{\pi}{2}$ engendre un sous-groupe cyclique d'ordre 4 de $\mathcal{D}$.

3° Remarquons que $\mathcal{D} \bigcap \mathcal{O}^+(V) = \mathcal{H}$, sous-groupe engendré par R.
Soient S la réflexion par rapport à Ox, T la réflexion par rapport à (OA). On a $R = T \circ S$ et $\mathcal{D} = \mathcal{H} \amalg (T \circ \mathcal{H})$ est engendré par S et T.

Remarque : $\mathcal{D}$ peut être défini par les générateurs S et R et par les relations

$$S^2 = Id_V,\ R^4 = Id_V,\ S \circ R \circ S = R^{-1}.$$

B

a) L'intersection $\mathcal{H} = \mathcal{G} \cap \mathcal{O}^+(V)$ est un sous-groupe de $\mathcal{G}$.
b) L'image de $\mathcal{H}$ par θ est une partie finie de $\mathbf{R}$. Elle admet donc un plus petit élément. On remarque que θ est injective, il existe donc un élément R_1 de $\mathcal{H}$ et un seul dont la mesure est minimale.
Soit $R \in \mathcal{H}$, comme $\theta(R_1) \neq 0$, il existe un entier m tel que

$$m\theta(R_1) \leq \theta(R) < (m+1)\theta(R_1).$$

On en déduit:

$$0 \leq \theta(R) - m\theta(R_1) < \theta(R_1) \leq 2\pi.$$

Or considérons l'élément $RR_1^{-m} \in \mathcal{H}$, il vérifie : $\theta(RR_1^{-m}) \equiv \theta(R) - m\theta(R_1) \pmod{2\pi}$ et $\theta(RR_1^{-m}) \in]0, 2\pi]$. Supposons $\theta(R) - m\theta(R_1) > 0$ alors $\theta(R) - m\theta(R_1) = \theta(RR_1^{-m}) < \theta(R_1)$, ce qui contredit la minimalité de $\theta(R_1)$. Donc $\theta(R) = m\theta(R_1)$ et $\theta(RR_1^{-m}) = 2\pi$ d'où $R = R_1^m$.
Ceci montre que R_1 engendre $\mathcal{H}$, qui est donc cyclique.
L'ordre de $\mathcal{H}$ est le plus petit entier n vérifiant $R_1^n = Id_V,\ \theta(R_1^n) = n\theta(R_1) = 2\pi$, d'où $\theta(R_1) = \frac{2\pi}{n}$.

3° Soit Λ l'ensemble des points $A_k(\cos\frac{2\pi k}{n}, \sin\frac{2\pi k}{n})$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, n est bien le nombre minimal d'éléments de Λ, car si $A \in \Lambda$, les images itérées A, $R_1(A), \ldots, R_1^{n-1}(A)$ sont toutes distinctes, et doivent toutes appartenir à Λ.

4°
a) La composée d'une rotation et d'une symétrie est une symétrie. Tout élément de $\mathcal{G}$ est soit une symétrie, soit une rotation.
b) Soit $T \in \mathcal{G}$. Si T est une rotation, alors $T \in \mathcal{H}$; si T est une symétrie, $S^{-1}T$ est une rotation $R \in \mathcal{H}$, donc $T = S \circ R \in \mathcal{H}$, d'où $\mathcal{G} = \mathcal{H} \cup S\mathcal{H}$.
Remarque: cette union est disjointe donc $\operatorname{card}\mathcal{G} = 2\operatorname{card}\mathcal{H}$.
c) Tout élément de $\mathcal{G}$ s'écrit donc sous la forme $R_1^k (0 \leq k < n)$ ou $S \circ R_1^k (0 \leq k < n)$.

5° Tout sous-groupe fini $\mathcal{G}$ de $\mathcal{O}(V)$
- soit est un groupe de rotations, donc cyclique,
- soit contient une symétrie S et alors $\mathcal{G} = \mathcal{H} \amalg S\mathcal{H}$. Il est donc diédral, i.e. engendré par deux éléments R_1 et S vérifiant les relations: $R_1^n = Id_V = S^2$ et $S \circ R_1 \circ S = R_1^{n-1} = R_1^{-1}$.

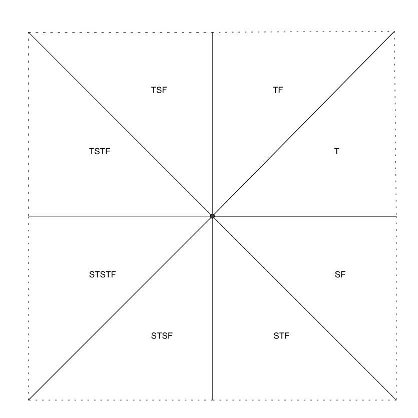
6° Soit (u_1, u_2) une base de V telle que $S(u_1) = u_1,\ S(u_2) = -u_2,\ u_i$ unitaire pour $i = 1, 2$.
On a alors relativement à cette base :

$$\operatorname{Mat}(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \operatorname{Mat}(R) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n) \\ \sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{pmatrix}, \operatorname{Mat}(T) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/n) & \sin(2\pi/n) \\ \sin(2\pi/n) & -\cos(2\pi/n) \end{pmatrix}$$

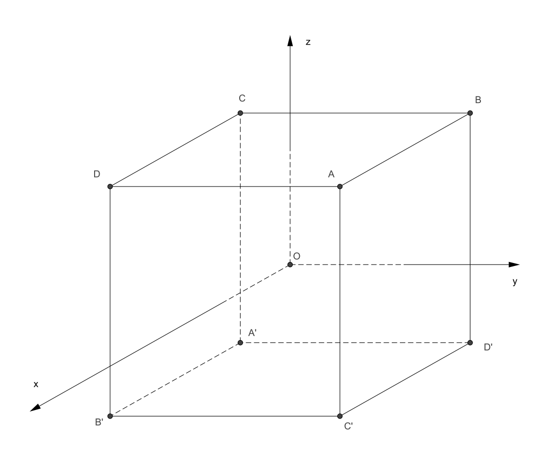
et $T = R \circ S$ représente la réflexion par rapport à la droite Δ d'équation

$$x\cos(2\pi/n) + y\sin(2\pi/n) = 0.$$

Autre démonstration: $S \circ R_1^{-1} = sym_\Delta^{-1}$, $R_1 \circ S = sym_\Delta^{-1} = sym_\Delta = T$, $\mathcal{G}$ est engendré par S et T.



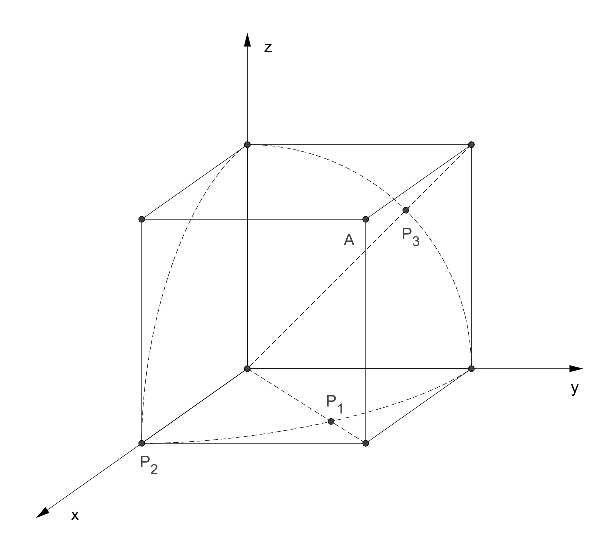
Deuxième partie



1° L'isobarycentre O de l'ensemble des sommets est conservé par toute application affine, et en particulier par toute isométrie laissant cet ensemble invariant.
$\mathcal{H}_\Gamma$ est isomorphe à un sous-groupe du groupe des permutations des huit sommets. En effet, $\mathcal{H}_\Gamma = \{$rotations conservant le cube$\}$ s'injecte dans $\mathcal{S}_8$: si A, B sont deux points, $f \in \mathcal{H}_\Gamma$ telle que $f(A) = A$, $f(B) = B$, $f(O) = O$, la restriction de f au plan AOB est l'identité puisque A, O, B en est un repère affine, f est une rotation qui a un plan de points invariants, elle est donc égale à l'identité.
Soient maintenant f, $g \in \mathcal{H}_\Gamma$, si $f(A) = M$, $f(B) = N$, $g(A) = M$ $g(B) = N$ donc $g \circ f^{-1} = Id_V$ et $g = f$.
Un élément de $\mathcal{H}_\Gamma$ est donc déterminé par les images de A et B. Comme $[MN]$ doit être une arête du cube, on doit avoir card $\mathcal{H}_\Gamma \leq 24\,(= 2 * 12)$.

2° *Eléments d'ordre 3* de $\mathcal{H}_\Gamma$: Considérons $\{f \in \mathcal{H}_\Gamma \mid f(A) = A\}$, la valeur de f en B peut être soit B, soit A', soit D. On en déduit $\operatorname{card} G \leq 3$.
La rotation d'axe (AC''), d'angle de mesure $2\pi/3$ ou $-2\pi/3$ laisse A fixe. On en déduit $\operatorname{card} G = 3$. On a donc trouvé 8 éléments d'ordre 3 dans $\mathcal{H}_\Gamma$.
Réciproquement, soit $f \in \mathcal{H}_\Gamma$ d'ordre 3. Supposons que f n'ait pas de sommet du cube fixe, f^{-1} n'en n'a pas non plus $((f^{-1} = f^2)$. Donc $\{1, f, f^2\}$ opère sur l'ensemble des sommets, toute orbite a 3 éléments, c'est absurde puisque 3 ne divise pas 8. Ainsi tout élément d'ordre 3 de $\mathcal{H}_\Gamma$ laisse un sommet fixe (et même deux).

3° *Eléments d'ordre 4* de $\mathcal{H}_\Gamma$: on connait déjà 2 rotations (d'angle droit) autour de Ox, Oy, Oz, ce qui fait 6 éléments.
Eléments d'ordre 2 de $\mathcal{H}_\Gamma$: demi-tours d'axes $Ox\, Oy$, Oz,d'axes OI où I est le milieu d'une arête, ce qui fait 9 éléments.
Nous dénombrons $8 + 6 + 9 + 1 = 24$ éléments (1 pour l'application identique).
4°



a) Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des pôles des rotations de $\mathcal{H}_\Gamma$. Déterminons $(\mathcal{P})$. Les axes de coordonnées fournissent $6(= 2.3)$ pôles, les axes passant par les sommets opposés $8(= 2.4)$, les axes passant par les milieux des arêtes $12(= 2.6)$; ce qui fait $8 + 12 + 6 = 26$ pôles.

b) Soit $P \in \mathcal{P}$. Il existe $f \in \mathcal{H}_\Gamma$ tel que (OP) soit l'axe de f. Soit $g \in \mathcal{H}_\Gamma$ et soit $P' = g(P)$, alors $gfg^{-1}(P') = P'$, $gfg^{-1} \in \mathcal{H}_\Gamma$, $gfg^{-1} \neq Id$ car $f \neq Id$. donc P' est le pôle associé à la rotation gfg^{-1} et $P' \in \mathcal{P}$. De plus f et gfg^{-1} ont même ordre. L'ensemble des pôles des éléments d'ordre fixé est donc invariant par $\mathcal{H}_\Gamma$.

c) Remarquons que pour que $\mathcal{P} = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$, il faut que P_1, P_2, P_3 soient (à l'ordre près) d'ordres respectifs $2, 4$ et 3. On sera alors sûr d'avoir $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ pour $i \neq j$, à condition d'avoir choisi P_2 pôle ne correspondant pas à une rotation d'ordre 2 également, comme par exemple $P_1(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $P_2(1, 0, 0)$, $P_3(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. Avec ce choix nous avons bien $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ pour $i \neq j$, c'est évident car les milieux des arêtes sont dans Ω_1.

Montrons $\mathcal{P} = \Omega_1 \amalg \Omega_2 \amalg \Omega_3$. Il suffit de montrer que $\mathcal{H}_\Gamma$ opère transitivement sur l'ensemble des sommets, sur l'ensemble des arêtes et sur l'ensemble des faces, ce qui est évident.

d) Soit $G_i = \{f \in \mathcal{H}_\Gamma \,|\, f(P_i) = P_i\}$, $\text{card}\, G_i.\, \text{card}\, \Omega_i = \text{card}\, \mathcal{H}_\Gamma) = 24$,

$$\text{card}\, G_1 = 2,\ \text{card}\, G_2 = 4,\ \text{card}\, G_3 = 3)$$

Remarque: $(\frac{24}{2} - 1) + (\frac{24}{4} - 1) + (\frac{24}{3} - 1) = 23 = 24 - 1$, ce qui permet de redémontrer que $\mathcal{P} = \Omega_1 \amalg \Omega_2 \amalg \Omega_3$.

Complément: Diverses démonstrations de ce que le groupe du cube a au plus 24 éléments

Première démonstration : (suggérée par le texte) On regarde les images du bipoint (A, B).

Deuxième démonstration: Soit Δ_1 la droite (AA'), Δ_2 la droite (BB'), Δ_3 la droite (CC'), Δ_4 la droite (DD').Toute rotation du cube permute $\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4\}$, d'où l'existence d'un morphisme φ de $\mathcal{H}_\Gamma$ dans $\mathcal{S}_4$. Si $f \in Ker(\varphi)$, si $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ sont des vecteurs directeurs de $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$, alors $\vec{f}(\vec{e}_1) = a.\vec{e}_1$, $\vec{f}(\vec{e}_2) = b.\vec{e}_2$, $\vec{f}(\vec{e}_3) = c.\vec{e}_3$, $\vec{f}(\vec{e}_4) = \lambda.\vec{e}_1 + \mu.\vec{e}_2 + \nu.\vec{e}_3$ avec $\lambda\mu\nu \neq 0$. Par exemple $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OA}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OB}$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{OC}$, $\vec{e}_4 = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$, $\vec{f}(\vec{e}_4) = d.(\vec{e}_1 + \vec{e}_3 - \vec{e}_2)$ et $a = b = c = d$, donc f est une homothétie et par suite la symétrie par rapport à O ou l'identité.

Troisième démonstration: Tout élément de $\mathcal{H}_\Gamma$ permute les faces. Soit $\mathcal{F}$ une face fixée; si $f(\mathcal{F}) = g(\mathcal{F})$, fg^{-1} est une rotation de $\mathcal{H}_\Gamma$ laissant $\mathcal{F}$ fixe, donc $fg^{-1} \in \{Id, \rho, \rho^2, \rho^3\}$ (ρ rotation d'ordre 4),$f \in \{g, \rho g, \rho^2 g, \rho^3 g\}$ et $\text{card}\, \mathcal{H}_\Gamma \leq 24$.

Troisième partie

A

1° Soit $S \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{H}$. On a $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$, $\mathcal{H} \neq \mathcal{G}$ et $\mathcal{H} = \mathcal{G} \cap \mathcal{O}^+(V)$. On en déduit $\mathcal{G} = \mathcal{H} \amalg S \circ \mathcal{H}$. $\mathcal{H}$ est le noyau de $\det : \mathcal{G} \to \{-1, +1\}$, il est donc distingué dans $\mathcal{G}$ et S est une réflexion ou une antirotation.

2° Soient σ la sphère unité, $R \neq Id$ une rotation d'axe Δ, $\Delta \cap \sigma = \{x_1, x_2\}$.

3° Soit x un pôle d'une rotation $R \in \mathcal{H}$. On a $R(x) = x$. Soit $T \in \mathcal{G}$, on a: $T \circ R \circ T^{-1} \in \mathcal{H}$, $(T \circ R \circ T^{-1})(T(x)) = T(x)$, donc $T(x)$ est pôle de la rotation $T \circ R \circ T^{-1}$.

4° Soit $\mathcal{H}_x = \{f \in \mathcal{H} \,|\, f(x) = x\}$ le stabilisateur de x dans $\mathcal{H}$, soit $\Omega_x = \{f(x) \,|\, f \in \mathcal{H}\}$, l'orbite de x par $\mathcal{H}$ et soit $n = \text{card}\, \mathcal{H}$.
a) L'application

$$\varphi_x : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \to & \Omega_x \\ R & \mapsto & R(x) \end{array} \right. .$$

est une surjection.
Ses fibres forment une partition de $\mathcal{H}$ dont les éléments sont les classes d'équivalence pour la relation

$$R_1 \gamma R_2 \Leftrightarrow R_1(x) = R_2(x)$$
ou encore
$$R_2^{-1} \in \mathcal{H}_x \Leftrightarrow R_2^{-1}(R_1(x)) = x.$$

On en déduit que $\mathcal{H}/\gamma \to \Omega_x$ est une bijection et par suite que

$$\operatorname{card} \Omega_x = \frac{\operatorname{card} \mathcal{H}}{\operatorname{card} \mathcal{H}_x} = \nu_x = \frac{n}{n_x} \text{ et } n = \nu_x n_x.$$

En fait l'orbite Ω_x est ainsi en bijection avec les classes à droite $\mathcal{H}/\mathcal{H}_x$ du groupe $\mathcal{H}$ modulo son sous-groupe $\mathcal{H}_x$.

b) Soit

$$\mathcal{U} = \{(R, x) \,|\, R \in \mathcal{H} \setminus Id_V,\, x \in \mathcal{H}_x \cup \mathcal{P}\}$$

On a

$$\operatorname{card}(\mathcal{U}) = 2(n-1).$$

En effet, à tout élément de $R \in \mathcal{H} \setminus Id_V$ correspondent deux pôles distincts.

5° Soit $\{x_1, \ldots, x_k\}$ une famille de représentants des k orbites distinctes. On a

$$\mathcal{P} = \Omega_1 \amalg \ldots \amalg \Omega_k \text{ avec } x_i \in \Omega_i, i \in [[1, n]]$$

Calcul de card($\mathcal{U}$):
Pour déterminer un élément de $\mathcal{U}$, on prend un pôle, soit x puis une rotation de pôle $x \neq Id_V$, or pour un pôle fixé, le nombre de rotations ayant ce pôle est $\operatorname{card}(\mathcal{H}_x) - 1$, $\mathcal{H}_x$ ne dépend que de l'orbite de x, Donc si $x \in \Omega_i$, on a $\operatorname{card}(\mathcal{H}_x) = n_i$ et $\operatorname{card}\{(R, x) \,|\, R \in \mathcal{H} \neq Id_V,\, x \text{ pôle de } R,\, x \in \Omega_i\} = \nu_i(n_i - 1)$, d'où

$$\operatorname{card}(\mathcal{U}) = \sum_{i=1}^{k} \nu_i(n_i - 1) = 2(n-1)$$

6° En divisant par n, on obtient:

$$2 - \frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\nu_i(n_i - 1)}{\nu_i n_i}$$

d'où:

$$2 - \frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{k} (1 - \frac{1}{n_i})$$

Si on avait $k = 1$, on aurait $2 - \frac{2}{n} = 1 - \frac{1}{n_1} \geq 1$ puisque $n \geq 2$ (ceci car $\mathcal{H} \neq \emptyset$), ce qui est impossible.

7° Remarquons que si x est un pôle, $\operatorname{card}(\mathcal{H}_x) \geq 2$, en effet, il existe une rotation $R \in \mathcal{H}_x$, différente de l'identité, et $Id_V \in \mathcal{H}_x$, $R \in \mathcal{H}_x$. Donc, pour tout i, $n_i \geq 2$, $1 - \frac{1}{n_i} \geq \frac{1}{2}$, or $\sum_1^k (1 - \frac{1}{n_i}) = 2 - \frac{2}{n} < 2$ d'où $2 > 2 - \frac{2}{n} \geq \frac{k}{2}$, d'où $k < 4$. Les seules valeurs possibles pour k sont donc 2 et 3.

8° $k = 2$

$$2 - \frac{2}{n} = 1 - \frac{1}{n_1} + 1 - \frac{1}{n_2}$$

ou encore

$$\tfrac{2}{n} = \tfrac{1}{n_1} + \tfrac{1}{n_2}$$

d'où

$$2 = \nu_1 + \nu_2 \text{ et } \nu_1 = \nu_2 = 1, (n = n_1 = n_2),$$

soit

$$\text{card}(\mathcal{H}) = \text{card}(\mathcal{H}_{x_1}) = \text{card}(\mathcal{H}_{x_2})$$

Donc tout $f \in \mathcal{H}$ laisse fixes x_1 et x_2, or puisqu'il existe $R \in \mathcal{H}$ différent de l'identité (sinon il n'y aurait pas de pôle), on doit avoir $x_2 = -x_1$, par suite $\mathcal{H}$ estle sous-groupe des rotations vectorielles laissant stable le plan (vectoriel) orthogonal à (x_1, x_2). rotation d'axe (x_1, x_2). La première partie nous permet d'affirmer que $\mathcal{H}$ est cyclique.

9° $k = 3$
$n_1 \leq n_2 \leq n_3$
a) $2 - \frac{2}{n} = 3 - \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_3}$, ou encore

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} - \frac{2}{n} = 1$$

Supposons $n_1 \geq 3$, alors $\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}, \frac{1}{n_3} \leq \frac{1}{3}$, d'où $1 \leq 1 - \frac{2}{n}$, ce qui est absurde, donc $n_1 = 2$.
b) Il vient $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_3} - \frac{2}{n} = \frac{1}{2}$. Supposons $n_2 \geq 4$, alors $\frac{1}{n_2} < \frac{1}{n_3} \leq \frac{1}{2}$, d'où $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} - \frac{2}{n}$, ce qui est absurde, donc

$$n_2 \in \{2, 3\}$$

c) Supposons $n_2 = 3$
Il vient $\frac{1}{n_3} - \frac{2}{n} = \frac{1}{6}$ d'où $\frac{1}{n_3} > \frac{1}{6}$ et $n_3 < 6$ et par suite

$$n_3 \in \{3, 4, 5\}.$$

10° Supposons

$$n_1 = 2,\ n_2 = 3,\ n_3 = 4,$$

il vient $\nu_1 = 12$, $\nu_2 = 8$, $\nu_3 = 6$, donc

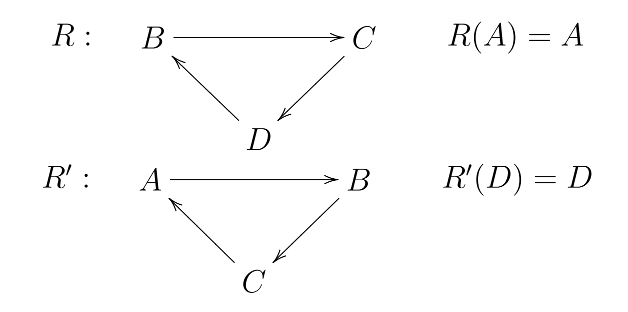
$$n = 24$$

Deux pôles diamétralement opposés ont des orbites de même cardinal. ainsi Ω_2 contient 8 pôles opposés deux à deux A, B, C, D et A', B', C', D'. On fait opérer : $\mathcal{H}$ sur $\{[AA'], [BB'], [CC'], [DD']\}$ par :

$$\Phi : \left| \begin{array}{lll} \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{S}_4 \\ R & \mapsto & \begin{pmatrix} [AA'] & [BB'] & [CC'] & [DD'] \\ [R(A)R(A')] & [R(B)R(B')] & [R(C)R(C')] & [R(D)R(D')] \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Cette application est injective, en effet si $R \neq Id$, R a deux pôles, il existe donc un élément de Ω_2 qui n'est pas un pôle de R, donc qui n'est pas fixé par R. Si R n'est pas d'ordre 2, $\Phi(R) \neq Id$. Si R est d'ordre 2, R est un retournement et $\Phi(R) = Id$ si et seulement si les quatre droites $(AA'), (BB'), (CC'), (DD')$ sont coplanaires. Mais alors $\mathcal{H}$ est un groupe de rotations par rapport à l' axe perpendiculaire à ce plan et est un groupe cyclique (cf 8) et il n'y a que deux orbites. Ce n'est pas le cas. Donc Φ est injective et comme $\mathcal{H}$ et $\mathcal{S}_4$ ont même cardinal, c'est un isomorphisme, d'où le résultat.

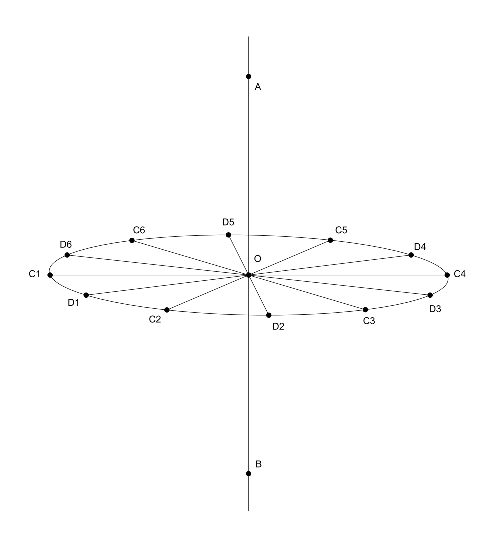
11°
a)
Cas $n_1 = 2$, $n_2 = n_3 = 3$: alors $n = 12$, $\nu_1 = 6$ (demi-tours) ,$\nu_2 = \nu_3 = 4$ (éléments d'ordre 3).
Considérons le pôle x_2: il existe une rotation d'ordre 3 d'axe $\mathbf{R}.x_2$. Si $A = x_2$, soit $B \in \Omega_2$ un autre pôle, qui n'est pas sur la droite (OA). B, $R(B)$, $R^2(B) = R^{-1}(B)$ sont donc trois points distincts de Ω_2, donc
$\Omega_2 = \{A,\ B,\ R(B),\ R^2(B)\}$ $\quad R(B) = C$, $R^2(B) = D$. Une rotation d'ordre 3 d'axe (OB) transforme A en $R(B)$ ou $R^2(B)$. On a donc
$(OA) \perp (BCD)$, $(OB) \perp (ACD)$, $(OC) \perp (ABD)$, $(OD) \perp (ABC)$, donc
$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}.(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OD} \ldots$.
D'où $AB^2 = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})^2 = OA^2 + OB^2 - 2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 2(1 - \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}) = BC^2 = BD^2 = AC^2 = AD^2$. Ainsi $ABCD$ est un tétraèdre régulier. On a



b) Cas $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 5$
Alors $n = 60$, $\nu_1 = 30$, $\nu_2 = 20$, $\nu_3 = 12$. Soit A un pôle de Ω_3, et B un pôle de Ω_3, non situé sur (OA). Il existe une rotation d'axe (OA), d'ordre 5. Soient $C = R(B)$, $D = R^2(B)$, $E = R^3(B)$, $F = R^4(B)$, $BCDEF$ est donc un pentagone régulier, de plan orthogonal à (OA). Il existe une rotation d'axe (OB) d'ordre 5, soit S. Soient $G = S(C)$, $H = S^2(C)$, $I = S^3(C)$, $J = S^4(C)$. Les éléments de Ω_3 forment un icosaèdre: 12 sommets, d'où partent 5 faces qui sont des triangles équilatéraux, ce qui donne au total $20 (= (12 * 5)/3)$ faces.

Autres cas:
$n_1 = n_2 = 2$
Il vient $2n_3 = n$. Posons $n = 2m$. On a $\nu_1 = \nu_2 = m$, $\nu_3 = 2$.
Soit $\{A, B\} \in \Omega_3$. Il existe une rotation ($\neq Id$) d'axe (OA) qui tranforme B en un élément de Ω_3, donc B appartient à l'axe (OA). Il est donc le symétrique de A par rapport à O.
Soient maintenant $C_1 \in \Omega_1$, $C_2, \ldots, C_m$ ses images par les rotations de pôle A; pour chaque i, il existe un demi-tour d'axe (OC_i) qui est dans $\mathcal{H}$ et qui doit transformer A en

A ou B; on en déduit que les C_i appartiennent au plan orthogonal à (OAB). Il en va de même pour les éléments de Ω_2, soit $D_1, D_2, \ldots, D_m$. On voit aussi que les D_i sont les milieux des arcs de cercle C_jC_k. On en déduit que $\mathcal{H}$ est le groupe diédral d'ordre $2m = n$.



Résumé suivant les valeurs de (n_1, n_2, n_3):

- $(2, 2, m) \mapsto$ groupe diédral
- $(2, 3, 3) \mapsto$ groupe du tétraèdre
- $(2, 3, 4) \mapsto$ groupe du cube (ou de l'octaèdre)
- $(2, 3, 5) \mapsto$ groupe de l'isocaèdre (ou du dodécaèdre)

B

1° $\mathbf{K} \subset \mathcal{O}^+(V)$, $\tilde{\mathbf{K}} = \mathcal{K} \cup \{-R \,|\, R \in \mathbf{K}\}$
Remarque: Si R est une rotation, $-R \in \mathcal{O}^-(V)$, $\tilde{\mathbf{K}}$ est un groupe, $\tilde{\mathbf{K}} \cap \mathcal{O}^+(V) = \mathbf{K}$.

2° Soit $\mathcal{J}$ un sous-groupe de $\mathcal{K}$ et soit $R_1 \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{J}$, alors $\mathcal{K} = \mathcal{J} \amalg R_1\mathcal{J}$ et $\mathcal{J}$ est un sous-groupe d'indice 2 de $\mathcal{H}$.
Soit $\widehat{\mathcal{J}} = \mathcal{J} \cup \{-R \,|\, R \in R_1\mathcal{J}\}$.
Si f, $g \in \mathcal{J}$, alors $fg \in \mathcal{J}$. Si $f \in \mathcal{J}$, $g \in -R_1\mathcal{J}$, $g = -g'$, $g' \in R_1\mathcal{J}$, $fg = -fg'$, $fg' \in R_1\mathcal{J}$, donc $fg \in -R_1\mathcal{J}$.
Si $f \in -R_1\mathcal{J}$, $g \in \mathcal{J}$, $f = -f'$, $f' \in R_1\mathcal{J}$, $fg = -f'g$, $f'g \in R_1\mathcal{J}$, $fg = -f'g$, $f'g \in -R_1\mathcal{J}$ donc $fg \in -R_1\mathcal{J}$.
Si $f \in -R_1\mathcal{J}$, $g \in -R_1\mathcal{J}$, $f = -f'$, $g = -g'$, $fg = f'g' \in \mathcal{J}$.
$\widehat{\mathcal{J}} \cap \mathcal{O}^+(V) = \mathcal{J}$ (évident).

3° $\mathcal{J} = \mathcal{H} \amalg S\mathcal{H} \quad S \in \mathcal{J} \cap \mathcal{O}^-(V), \quad S^2 \in \mathcal{O}^+(V)$ d'où $S^2 \in \mathcal{H}$.
Soit: $\mathcal{L} = \mathcal{H} \cup (-S)\mathcal{H}$, $\mathcal{L}$ est constitué de rotations car $-S$ est une rotation.
Remarquons que si $f, g \in \mathcal{H}$, $Sg^{-1} \in S\mathcal{H}$, $Sgf \in S\mathcal{H}$, $(Sf)(Sg) \in \mathcal{H}$
d'où $fg \in \mathcal{H}$, $f(-Sg) = -fSg \in -S\mathcal{H}$, $(-Sf)g \in -S\mathcal{H}$, $(-Sf)(-Sg) \in \mathcal{H}$, $f^{-1} \in \mathcal{H}$, $(-Sg)^{-1} = (Sg)^{-1} \in -S\mathcal{H}$.
Donc $\mathcal{L}$ est un sous-groupe de $\mathcal{O}^+(V)$.

Conclusion: Soit $\mathcal{J}$ un sous-groupe fini de $O(V)$.

- $\mathcal{J}$ est un sous-groupe de rotations. Considérons $\tilde{\mathcal{J}}$, il est du type étudié au A, car $\tilde{\mathcal{J}} \cap O^-(V) \neq \emptyset$, et $\mathcal{I}$ est le sous-groupe des rotations de $\tilde{\mathcal{J}}$, c'est donc un des sous-groupes rencontrés au A (cyclique, diédral, du cube, du tétraèdre, de l'icosaèdre).
- $\mathcal{J} \cap \mathcal{O}^-(V) \neq \emptyset$ et $-Id_V \in \mathcal{I}$, alors $\mathcal{I} = \mathcal{H} \cup (-\mathcal{H})$.
- $\mathcal{J} \cap \mathcal{O}^-(V) \neq \emptyset$ et $-Id_V \notin \mathcal{J}$, alors si $S \in \mathcal{J} \cap \mathcal{O}^+(V)$, on définit comme au 3°, $\mathcal{L} = \mathcal{H} \cup (-S)\mathcal{H}$. c'est un groupe de rotations et l'application $\varphi : \mathcal{I} \to \mathcal{L}$ définie par $\varphi(f) = f$ si $f \in \mathcal{H}$ et $\varphi(Sf) = -Sf$ est un isomorphisme de $\mathcal{J}$ sur $\mathcal{L}$, donc $\mathcal{J}$ est isomorphe à l'un des groupes du premier cas.

Exemple: Le groupe des isométries du tétraèdre est isomorphe à $\mathcal{S}_4$, qui est isomorphe au groupe des rotations du cube.

écrit

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

77

Sujet (durée : 5 heures)

La deuxième et la troisième partie du problème sont totalement indépendantes l'une de l'autre

Première partie

1° Démontrer que l'intégrale

$$\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}, \qquad \text{où} \qquad y \in [0,1[,$$

admet une limite finie, qu'on notera ω, quand y tend vers 1 par valeurs inférieures, et démontrer que

$$1 < \omega < \frac{\pi}{2}$$

(on pourra remarquer que $0 < t^4 < t^2$ pour $t \in]0,1[$).

On ne cherchera pas, pour le moment, à préciser davantage ω ; cela fera l'objet de la deuxième partie du problème.

2° On considère l'application Φ de $[-1, +1]$ dans R définie par

$$\begin{cases} \Phi(y) = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} & \text{pour} \quad y \in]-1, +1[\\ \Phi(1) = \omega \\ \Phi(-1) = -\omega \end{cases}$$

Préciser $\Phi(0)$. Étudier Φ : parité, continuité, sens de variation. Démontrer que Φ est une bijection de $[-1, +1]$ sur $\Omega = [-\omega, +\omega]$.

3° Démontrer que Φ est dérivable sur $]-1, +1[$ et définir alors $\Phi' = \frac{d\Phi}{dy}$. Préciser $\Phi'(0)$.

Φ est-elle dérivable à gauche au point 1 ?
(On pourra par exemple utiliser la double inégalité

$$1 - t^2 \leqslant 1 - t^4 \leqslant 2(1-t^2)$$

valable pour $t \in [0,1]$)

4° Tracer la courbe représentative de Φ dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé, en prenant 1,3 comme valeur approchée de ω. On précisera la position de la courbe par rapport à la première bissectrice; on calculera en outre $\Phi\left(\frac{1}{2}\right)$ à 10^{-3} près, en utilisant par exemple un développement en série de $\Phi(y)$.

Deuxième partie

L'objet de cette partie est de calculer une valeur approchée de

$$\omega = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

1° *Première méthode.*

A partir du développement de $\frac{1}{\sqrt{1-t^4}}$ en série entière, démontrer que ω est la somme d'une série dont le terme général de rang n est équivalent à $\frac{\lambda}{n\sqrt{n}}$, λ étant un réel que l'on précisera. (On rappelle que

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n}\, \frac{1.3.5 \ldots (2n-1)}{2.4.6 \ldots 2n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,)$$

2° *Deuxième méthode.*

Démontrer que $K = \int_0^1 \frac{1-t}{\sqrt{1-t^4}}\, dt$ existe, puis que $\omega - K = \frac{\pi}{4}$.

Démontrer que K est la somme d'une série dont le terme général de rang n est équivalent à $\frac{\mu}{n^2\sqrt{n}}$, μ étant un réel que l'on précisera.

3° *Troisième méthode.*

Transformer $\omega + 1 = \int_0^1 \frac{1+\sqrt{1-t^4}}{\sqrt{1-t^4}}\,dt$

en effectuant le changement de variable défini par

$$\sqrt{1-t^4} = 1 - u^4.$$

Démontrer alors que l'on peut calculer

$$\int_0^1 \sqrt[4]{2-u^4}\,du$$

par un développement en série que l'on précisera et que cette série est majorée par une série géométrique.

4° Trouver une valeur approchée de ω à 10^{-3} près.

Troisième partie

1° *a.* Démontrer que l'égalité $x = \Phi(y)$ permet de définir une application s de $\Omega = [-\omega, +\omega]$ dans $\mathbb{R}$:

$$x \longmapsto s(x) = y.$$

Préciser $s(0)$, $s(\omega)$, $s(-\omega)$.

Étudier s : parité, continuité, sens de variation.

b. Démontrer que s est dérivable sur Ω; s' désignant la fonction dérivée de s, préciser $s'(0)$, $s'(\omega)$, $s'(-\omega)$.

Démontrer que s' est continue sur Ω.

Démontrer que, sur Ω, s vérifie la relation

(E) $$s'^2(x) + s^4(x) = 1.$$

c. En déduire que, sur $]-\omega, +\omega[$, s vérifie la relation

(F) $$s''(x) + 2s^3(x) = 0.$$

La relation (F) est-elle vérifiée par s sur Ω ?

2° A chaque x de $\mathbb{R}$ est associé un élément p de $\mathbb{Z}$, et un seul, défini par

$$(2p-1)\,\omega \leqslant x < (2p+1)\,\omega$$

Sur $[(2p-1)\,\omega, (2p+1)\,\omega[$ on pose alors

$$S(x) = (-1)^p\, s(x - 2p\omega).$$

Démontrer que l'on définit ainsi une application S de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui est impaire, continue et périodique.

Démontrer que, sur $\mathbb{R}$, S est dérivable et vérifie les deux relations (E) et (F). En déduire que, sur $\mathbb{R}$, S est dérivable à un ordre quelconque.

Tracer la courbe représentative de S dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé, en précisant les tangentes à cette courbe aux points d'ordonnées respectives 0, 1 et -1.

3° Étudier sur $\mathbb{R}$ la variation de $C = \frac{dS}{dx}$. Démontrer en particulier que C est paire et périodique et tracer dans le repère précédent la courbe représentative de C, en précisant les tangentes à cette courbe aux points d'ordonnées respectives 0, 1 et -1.

Déterminer les ordonnées (on ne demande pas les abscisses) des points communs aux deux courbes ainsi dessinées.

Donner, au voisinage de zéro, les trois premiers termes du développement limité de $S(x)$, puis de $C(x)$, x étant l'infiniment petit principal.

4° On considère la courbe (γ) définie par sa représentation paramétrique dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$:

$$\begin{cases} x = C(m) \\ y = S(m) \qquad (m \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

Quelle est l'équation cartésienne de (γ)?

Construire (γ). Préciser en particulier :

- les points de (γ) situés sur les axes de coordonnées et le contact de (γ) avec ses tangentes en ces points;
- la position relative de (γ) et du cercle de centre O et de rayon 1;
- les points de (γ) situés sur les bissectrices des axes de coordonnées et les tangentes en ces points.

Évaluer l'aire de la partie finie du plan limitée par (γ). On pourra pour cela démontrer au préalable la relation vérifiée par tout x de $[-1, +1]$:

$$x\sqrt{1-x^4} = 3\int_0^x \sqrt{1-t^4}\,dt - 2\,\Phi(x).$$

5° Démontrer que toute solution de l'équation (E) peut être mise sous l'une des formes

$$y = S(x - x_0) \quad \text{ou} \quad y = -S(x - x_0).$$

Démontrer que, quel que soit le réel a, f définie par

$$f(x) = \frac{S(x)\,C(a) + C(x)\,S(a)}{1 + S^2(x)\,S^2(a)}$$

vérifie la relation (E).

Déduire de ce qui précède que, quels que soient les réels a et b,

$$S(a+b) = \frac{S(a)\,C(b) + S(b)\,C(a)}{1 + S^2(a)\,S^2(b)}.$$

Établir les formules donnant $C(a+b)$, $S(2a)$, $C(2a)$.

Calculer $S\left(\frac{\omega}{2}\right)$ et $C\left(\frac{\omega}{2}\right)$.

(3)

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

77

Sujet (durée : 5 heures)

PRÉAMBULE

Dans tout le problème, $\mathcal{A}$ désigne un espace affine euclidien de dimension finie $n \geqslant 1$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de l'espace vectoriel associé. On note $\det_{\mathcal{B}}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ le déterminant des composantes sur $\mathcal{B}$ des n vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ pris dans cet ordre.

Les deuxième et troisième parties n'utilisent pas les résultats de la première.

PREMIÈRE PARTIE

Dans toute cette première partie, $n = 2$

1° *a.* A, B, C étant trois points de $\mathcal{A}$, démontrer que le nombre $\frac{1}{2}\left|\det_{\mathcal{B}}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})\right|$ ne dépend ni de l'ordre dans lequel sont énoncés les points A, B, C, ni du choix de $\mathcal{B}$. Ce nombre est, par définition, l'aire du triangle ABC, notée Aire (ABC).

b. ABCD désignant un quadrilatère convexe de diagonales AC et BD, démontrer que

$$\text{Aire (ABC)} + \text{Aire (ADC)} = \text{Aire (BAD)} + \text{Aire (BCD)}.$$

Ce nombre est, par définition, l'aire de ABCD.

c. Dans toute la suite de cette première partie, ABC désigne un triangle non aplati d'aire Δ. Démontrer que toute droite qui rencontre le triangle le partage en deux parties dont la somme des aires est Δ.

k étant un réel donné vérifiant $0 < k \leqslant \frac{1}{2}$, la droite D est dite k-convenable, relativement à ABC, si elle partage ce triangle en deux parties d'aires respectives $k\,\Delta$ et $(1-k)\,\Delta$. On se propose d'étudier l'ensemble D_k(A, B, C) des points de $\mathcal{A}$ par où ne passe aucune droite k-convenable (relativement à ABC).

CAPES externe 1977, composition 2

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Sujet (durée : 5 heures)

PRÉAMBULE

Dans tout le problème, $\mathcal{A}$ désigne un espace affine euclidien de dimension finie $n \geqslant 1$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de l'espace vectoriel associé. On note $\det_{\mathcal{B}} (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$ le déterminant des composantes sur $\mathcal{B}$ des n vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ pris dans cet ordre.

Les deuxième et troisième parties n'utilisent pas les résultats de la première.

PREMIÈRE PARTIE

Dans toute cette première partie, $n = 2$

1° *a.* A, B, C étant trois points de $\mathcal{A}$, démontrer que le nombre $\frac{1}{2} |\det_{\mathcal{B}} (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|$ ne dépend ni de l'ordre dans lequel sont énoncés les points A, B, C, ni du choix de $\mathcal{B}$. Ce nombre est, par définition, l'aire du triangle ABC, notée Aire (ABC).

b. ABCD désignant un quadrilatère convexe de diagonales AC et BD, démontrer que

$$\text{Aire (ABC)} + \text{Aire (ADC)} = \text{Aire (BAD)} + \text{Aire (BCD)}.$$

Ce nombre est, par définition, l'aire de ABCD.

c. Dans toute la suite de cette première partie, ABC désigne un triangle non aplati d'aire Δ. Démontrer que toute droite qui rencontre le triangle le partage en deux parties dont la somme des aires est Δ.

k étant un réel donné vérifiant $0 < k \leqslant \frac{1}{2}$, la droite D est dite k-convenable, relativement à ABC, si elle partage ce triangle en deux parties d'aires respectives $k\,\Delta$ et $(1 - k)\,\Delta$. On se propose d'étudier l'ensemble D_k (A, B, C) des points de $\mathcal{A}$ par où ne passe aucune droite k-convenable (relativement à ABC).

2° Démontrer que si $\mathcal{T}$ est une application affine bijective de $\mathcal{A}$ dans lui-même (c'est-à-dire une transformation affine de $\mathcal{A}$), avec $A' = \mathcal{T}(A)$, $B' = \mathcal{T}(B)$, $C' = \mathcal{T}(C)$, $D_k(A', B', C')$ est l'image par $\mathcal{T}$ de $D_k(A, B, C)$. Préciser celles de ces transformations $\mathcal{T}$ qui laissent globalement invariant l'ensemble $\{A, B, C\}$. Quelles propriétés de D_k (A, B, C) peut-on déduire de l'existence de telles transformations ?

3° Le plan $\mathcal{A}$ est rapporté au repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, x et y désignant les coordonnées d'un point quelconque dans ce repère. Soit $\mathcal{H}$ la courbe d'équation

$$x\,y = \frac{k}{4}.$$

a. Démontrer que toute tangente à $\mathcal{H}$ coupe la droite AB en un point B' et la droite AC en un point C' tels que Aire (AB'C') $= k\,\Delta$.

b. Sur quelle partie $\mathcal{H}_1$ de $\mathcal{H}$ faut-il choisir le point de contact pour que B' soit entre A et B et C' entre A et C? Préciser les coordonnées des points limitant $\mathcal{H}_1$.

c. Démontrer que, réciproquement, si une droite D coupe AB en B' entre A et B et AC en C' entre A et C, tels que Aire (AB'C') $= k\Delta$, D est une tangente à $\mathcal{H}_1$.

d. Déduire de ce qui précède qu'une droite est k-convenable (relativement à ABC) si et seulement si elle est tangente à l'un quelconque de six arcs analogues à $\mathcal{H}_1$; on précisera ces arcs, sans autre démonstration, notamment l'arc $\mathcal{H}'_1$, qui est inclus dans la courbe d'équation $x\,y = \frac{1-k}{4}$.

Représenter ces six arcs sur une figure dans le cas $k = 0{,}3$ et, sur une autre figure, dans le cas $k = 0{,}47$; le triangle sera dessiné équilatéral, le côté mesurant 20 cm. On fera figurer les tangentes aux extrémités des six arcs.

4° On va maintenant préciser D_k (A, B, C) en utilisant le même repère que dans 3°.

a. Démontrer, en reprenant l'équation de la tangente à $\mathcal{H}$ au point de coordonnées x_0 et $\frac{k}{4x_0}$, qu'il passe par le point M de coordonnées x et y une tangente (au moins) à $\mathcal{H}_1$ si et seulement si

$$[(ky - k + x)\quad(y - k + kx) \leqslant 0]$$

$$\text{ou}\quad \left[\left(\frac{k}{2} \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}\right) \text{ et } (y - k + kx > 0) \text{ et } (4\,xy - k \leqslant 0)\right].$$

b. Démontrer que D_k (A, B, C) est contenu dans le demi-plan ouvert $\mathring{E}_1$ défini par l'inégalité $ky - k + x > 0$. (On peut supposer que les coordonnées de M vérifient $ky - k + x \leqslant 0$ et démontrer qu'alors

$$(ky - k + x)(y - k + kx) \leqslant 0$$

ou bien

$$[(1-k)\ y-(1-k)+1-x-y][y-(1-k)+(1-k)\ (1-x-y)] \leqslant 0$$

ou bien $[k\ (1 - x - y) - k + x][(1 - x - y) - k + kx] \leqslant 0$.)

c. D_k (A, B, C) est donc contenu dans l'intersection $\mathring{K}$ de six demi-plans analogues à $\mathring{E}_1$. Démontrer que par aucun point de $\mathring{K}$ il ne passe de tangente à $\mathcal{H}'_1$.

d. Le point M (x, y) appartenant à $\mathring{K}$, traduire par des inégalités portant sur x et y l'appartenance de M à D_k (A, B, C). Pour quelles valeurs de k D_k (A, B, C) est-il vide? (On pourra considérer x, y et $(1 - x - y)$ comme les zéros d'un certain polynôme du 3ᵉ degré.)

Faire apparaître éventuellement D_k (A, B, C) sur les figures construites au 3°.

Deuxième partie

Avant d'aborder la troisième partie, on va préciser, pour n quelconque $(n \geqslant 1)$, certains aspects des notions de polyèdre convexe et de volume. *Les propriétés rappelées dans les quatre alinéas qui suivent seront admises.*

Une partie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$ est convexe si et seulement si, pour tous points M, M' de $\mathcal{C}$, le segment MM' (ensemble des barycentres de M, M' affectés de coefficients positifs de somme 1) est dans $\mathcal{C}$. L'intersection d'une famille de convexes est convexe.

La suite $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ de $(n + 1)$ points de l'espace affine $\mathcal{A}$, de dimension n, étant un repère affine, à tout point M de $\mathcal{A}$ est associée une suite unique $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ de réels vérifiant

$$x_0 + x_1 + \dots + x_n = 1 \text{ (coordonnées barycentriques de M)},$$

de telle sorte que M est le barycentre de la famille pondérée (A_i, x_i), $0 \leqslant i \leqslant n$.

Pour toute suite $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de réels *non tous égaux*, l'ensemble des points M pour lesquels $\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0$ est un hyperplan H de $\mathcal{A}$. Tout hyperplan a une équation de cette forme.

Dans les mêmes conditions, l'ensemble des points M pour lesquels $\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \geqslant 0$ est l'un des deux demi-espaces fermés de $\mathcal{A}$ limités par H, l'autre étant caractérisé par

$$\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \leqslant 0;$$

ces deux demi-espaces sont convexes.

Pour tout repère affine $(A_0, A_1, \dots, A_n)$ de $\mathcal{A}$, à chaque point A_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$ on associe l'hyperplan H_i contenant tous les points du repère sauf A_i, et le demi-espace fermé E_i limité par H_i et contenant A_i. On appelle alors *polyèdre élémentaire* P de sommets $A_0, A_1, \dots, A_n$ l'intersection des $(n + 1)$ demi-espaces fermés E_i.

$\mathcal{B}$ étant une base orthonormée de l'espace vectoriel associé à $\mathcal{A}$, on considère maintenant le réel

$$\frac{1}{n!}\left| \det_{\mathcal{B}} (\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}) \right|.$$

1° Démontrer que ce réel ne dépend ni de l'ordre dans lequel sont énoncés les sommets du polyèdre élémentaire P, ni du choix de la base orthonormée $\mathcal{B}$. Ce réel, noté v_n (P), est appelé volume de P.

2° Soit M un point de P, P_i le polyèdre élémentaire, défini quand $M \notin H_i$, de sommets $A_0, A_1, \dots, A_{i-1}, M, A_{i+1}, \dots, A_n$. Soit φ_i la fonction définie sur P par

$$\varphi_i(M) = v_n(P_i) \quad \text{si } P_i \text{ est défini}$$
$$\varphi_i(M) = 0 \quad \text{dans le cas contraire.}$$

a. Démontrer que φ_i est la restriction à P d'une fonction affine, c'est-à-dire d'une application affine de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$.

b. Soit φ la fonction définie sur P par $\varphi(M) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(M)$. Quelle valeur prend-elle en un sommet de P ? Démontrer que φ est constante sur P et que le volume de P est la somme des volumes des P_i définis.

3° On appelle *polyèdre fermé convexe* l'intersection K, lorsqu'elle est *bornée* et *non vide*, d'un nombre fini p de demi-espaces fermés de $\mathcal{A}$.

a. Démontrer que $p \geqslant n + 1$. On pourra, en le justifiant, utiliser le fait que l'intersection de q hyperplans *vectoriels* contient une droite *vectorielle*, si $q \leqslant n - 1$.

b. Lorsqu'un polyèdre fermé convexe K est contenu dans un hyperplan de $\mathcal{A}$, on dit qu'il est aplati. Démontrer que si K est un polyèdre fermé convexe non aplati, intersection de $(n+1)$ demi-espaces fermés E_i de $\mathcal{A}$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$, les $(n+1)$ hyperplans limitant les E_i se coupent n par n en un point unique, et que K est le polyèdre élémentaire admettant pour sommets les $(n+1)$ points ainsi obtenus.

4° *a.* Établir que pour que la suite réelle (y_0, y_1, y_2) satisfasse au système d'inégalités

$$S : [y_0 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad y_1 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad y_2 \leqslant 0 \quad \text{et} \quad y_0 + y_1 + y_2 \geqslant 0]$$

il faut et il suffit qu'elle satisfasse à l'un ou l'autre des systèmes S', S"

$$S' : [y_0 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad y_2 \leqslant 0 \quad \text{et} \quad y_1 + y_2 \geqslant 0]$$
$$S'' : [y_1 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad y_0 + y_1 + y_2 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad y_1 + y_2 \leqslant 0].$$

b. Plus généralement, m et p étant deux entiers vérifiant $0 \leqslant p \leqslant m$, démontrer que pour que la suite de réels $(y_0, y_1, \ldots, y_m)$ vérifie le système suivant S de $(m+2)$ inégalités

$$S : \begin{cases} y_i \geqslant 0 \text{ pour tout } i \text{ tel que } 0 \leqslant i \leqslant p \\ \text{et } y_i \leqslant 0 \text{ pour tout } i \text{ (s'il en existe) tel que } p+1 \leqslant i \leqslant m \\ \text{et } y_0 + y_1 + \ldots + y_m \geqslant 0 \end{cases}$$

il faut et il suffit que la suite $(y_0, y_1, \ldots, y_m)$ vérifie l'un au moins de t systèmes d'inégalités $S'_1, S'_2, \ldots S'_t$, chacun des systèmes S'_j $(1 \leqslant j \leqslant t)$ satisfaisant aux trois conditions :

α. S'_j est la conjonction de $(m+1)$ inégalités de la forme $z_s \geqslant 0$ (ou $z_s \leqslant 0$), z_s désignant soit un y_i, soit une somme de y_i $(0 \leqslant i \leqslant m)$.

β. Le système S''_j, obtenu en remplaçant dans S'_j chaque inégalité large par une inégalité stricte, a des solutions.

γ. Si $(y_0, y_1, \ldots, y_m)$ vérifie simultanément deux systèmes distincts $S'_j, S'_{j'}$, (ce qui exige $t \geqslant 2$), alors un certain z_s est nul.

On pourra procéder par récurrence sur m; après avoir formulé l'hypothèse de récurrence convenable, on remarquera la vérité de la proposition :

$$[(y_1 + y_2 + \ldots + y_m \geqslant 0) \quad \text{ou} \quad (y_1 + y_2 + \ldots + y_m \leqslant 0)]$$

5° Soit P le polyèdre élémentaire dont les sommets sont les points du repère affine $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$, E un demi-espace fermé de $\mathcal{A}$ limité par l'hyperplan H, K l'intersection (supposée non vide et non aplatie) de P et de E.

a. Démontrer qu'un point M appartient à K si et seulement si ses coordonnées barycentriques $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ vérifient un système de $(n+2)$ inégalités, de la forme :

$$\left[(\forall i, \ 0 \leqslant i \leqslant n, \ x_i \geqslant 0) \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x_i \geqslant 0 \right]$$

où les α_i sont des réels non tous égaux.

b. En posant, pour $\alpha_i \neq 0$, $\alpha_i x_i = y_i$ et en utilisant 4° *b.* de la deuxième partie, démontrer que K est la réunion de polyèdres élémentaires constituant une famille finie $\mathcal{F}$ telle que l'ensemble des points communs à deux quelconques de ces polyèdres soit contenu dans une réunion finie d'hyperplans de $\mathcal{A}$. On note $V_{\mathcal{F}}$ la somme des volumes des polyèdres de la famille $\mathcal{F}$.

On admettra que si K est aussi la réunion de polyèdres élémentaires constituant une autre famille finie $\mathcal{F}'$ possédant la même propriété, alors $V_{\mathcal{F}'} = V_{\mathcal{F}}$. Par définition ce réel sera appelé volume de K et noté v_n (K).

A un polyèdre aplati, ainsi qu'à l'ensemble vide, on attribuera un volume nul.

Troisième partie

Dans $\mathcal{A}$, de dimension finie n quelconque $(n \geqslant 1)$, on se donne un polyèdre élémentaire P de volume v_n (P). Soit k un réel vérifiant $0 < k \leqslant \frac{1}{2}$.

Un hyperplan H de $\mathcal{A}$ est dit k-convenable (*sous-entendu relativement à* P) s'il partage P en deux polyèdres de volumes respectifs $k\, v_n$ (P) et $(1-k)\, v_n$ (P). On appelle D_k (P) l'ensemble des points de $\mathcal{A}$ par où ne passe aucun hyperplan k-convenable.

1° On note Σ l'ensemble des suites réelles $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ où les α_i ne sont pas tous égaux. Soit g la fonction qui à $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \Sigma$ associe le volume v_n (K) de l'intersection K de P et du demi-espace fermé E de $\mathcal{A}$ caractérisé par

$$\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n \geqslant 0.$$

Soit m, p deux entiers tels que $0 \leqslant p \leqslant m \leqslant n$.

Soit $\mathcal{L}(m, p)$ la partie de Σ définie par les conditions :

$$\begin{cases} \text{pour tout } i \text{ vérifiant } 0 \leqslant i \leqslant p, & \alpha_i > 0. \\ \text{pour tout } i \text{ (s'il en existe) vérifiant } p+1 \leqslant i \leqslant m, & \alpha_i < 0 \\ \text{pour tout } i \text{ (s'il en existe) vérifiant } m+1 \leqslant i \leqslant n, & \alpha_i = 0. \end{cases}$$

Démontrer que la restriction à $\mathcal{L}(m, p)$ de la fonction g est une fonction rationnelle de $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, donc continue sur $\mathcal{L}(m, p)$ considérée comme partie de l'espace normé $\mathbb{R}^{n+1}$.

On admettra que g est continue sur Σ et vérifie la propriété de « la valeur intermédiaire ».

2° Démontrer que si par M_0 de $\mathcal{A}$ il passe un hyperplan k-convenable, alors pour tout réel k' tel que $k \leqslant k' \leqslant \frac{1}{2}$ il passe par M_0 un hyperplan k'-convenable.

3° Soit H un hyperplan k-convenable. Il partage P en deux polyèdres dont l'un, soit Π, a pour volume $k\, v_n$ (P). Soit M un point quelconque de Π ; démontrer que M n'appartient pas à D_k (P). (On pourra considérer l'hyperplan parallèle à H et contenant M.) En déduire que D_k (P) est convexe.

4° Démontrer que si D_k (P) est non vide, l'isobarycentre des sommets de P appartient à D_k (P). (On pourra utiliser la convexité de D_k (P) et l'existence de transformations affines de $\mathcal{A}$ laissant globalement invariant l'ensemble des sommets de P.)

CAPES externe 1978, composition 1

PB CAPES 1978

L'objet du problème est *l'étude* de certaines équations différentielles linéaires du type :

(E) $$(ax^2 + bx + c)y'' + (px + q)y' + sy = 0$$

a, b, c, p, q, s étant six constantes réelles telles que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Dans tout le problème, on utilisera les définitions et on admettra, sans démonstration, les résultats qui suivent et qui sont valables pour tout intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. On notera I un tel intervalle.

0-1. On appelle solution de (E) sur I toute application φ de I dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivable sur I, et telle que :

$$\forall x \in I, \quad (ax^2 + bx + c)\,\varphi''(x) + (px + q)\,\varphi'(x) + s\varphi(x) = 0.$$

On note (I, φ) une telle solution.

0-2. L'ensemble des solutions de (E) sur I est, relativement aux opérations usuelles (addition des applications et multiplication d'une application par un réel), un espace vectoriel réel V_I ~~de dimension au plus deux~~. En particulier, pour tout I, l'application nulle est solution de (E) sur I. On l'appellera solution triviale de (E) sur I.

0-3. Intégrer l'équation (E) c'est déterminer tous les couples (I, V_I). On pourra, conformément à l'usage, se borner à déterminer ceux de ces couples pour lesquels V_I ne se réduit pas à la solution triviale.

0-4. Connaissant une solution (I, φ_0) de (E), si φ_0 ne s'annule en aucun point de I, on peut, pour chaque application φ de I dans $\mathbb{R}$ ~~et de classe $\mathcal{C}_2$~~, définir, par $\varphi = \psi.\varphi_0$, une application ψ de I dans $\mathbb{R}$ ~~et de classe $\mathcal{C}_2$~~. Cette application φ définit une solution (I, φ) de (E) si et seulement si l'application ψ', dérivée de ψ, vérifie l'équation différentielle linéaire du premier ordre (F) : deux fois dérivable

(F) $$\varphi_0(x)\,(ax^2 + bx + c)y' + [(px + q)\,\varphi_0(x) + 2\,(ax^2 + bx + c)\,\varphi'_0(x)]\,y = 0.$$

L'intégration de (F) permet de déterminer toutes les applications ψ et, par conséquent, le couple (I, V_I) ensemble des solutions de (E) sur I.

I

L'essentiel de I-3 et I-4 peut être traité indépendamment de I-1 et I-2.

Étude de l'équation :

(E_1) $$y'' + 2y' + (1 - \lambda)\,y = 0 \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

I-1. Intégrer l'équation (E_1).

I-2. Montrer que, pour tout λ, (E_1) admet sur $\mathbb{R}$ une solution et une seule φ_λ vérifiant les conditions :

$$\varphi_\lambda(0) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi'_\lambda(0) = 1.$$

Déterminer φ_λ.

I-3. On se place dans le cas $\lambda = 0$. Montrer que φ_0 est définie par : $\varphi_0(x) = x\,e^{-x}$ (e désignant la base des logarithmes népériens). Étudier φ_0 et tracer sa courbe représentative Γ_0 (on étudiera soigneusement les branches infinies et la concavité de Γ_0).

I-4. On se place dans le cas $\lambda > 0$ et l'on pose $k = \sqrt{\lambda}$.

Montrer que $\varphi_\lambda = \varphi_{k^2}$ est définie par $\varphi_\lambda(x) = \dfrac{1}{k}\,e^{-x}\,\mathrm{sh}(kx)$ (sh désignant le sinus hyperbolique). Étudier φ_{k^2} suivant les valeurs de k et tracer sa courbe représentative Γ_k (on étudiera soigneusement, dans chacun des cas mis en évidence, les branches infinies et la concavité de Γ_k).

II

Recherche de solutions polynômes.

II-1. Montrer qu'une condition nécessaire pour que (E) admette sur $\mathbb{R}$ au moins une solution polynôme non triviale est que l'équation en t

$$a\,t^2 + (p-a)t + s = 0$$

admette une racine dans $\mathbb{N}$ (ensemble des entiers naturels). Cette condition nécessaire sera notée (P) dans la suite du problème.

II-2. On considère l'équation (E_2) :

$$(E_2) \qquad (x^2+x)y'' - (5x+2)y' + 8y = 0.$$

Montrer que (E_2) admet sur $\mathbb{R}$ des solutions polynômes non triviales.
Déterminer ces solutions. Utiliser ces solutions pour intégrer (E_2).

II-3. On considère l'équation (E_3) :

$$(E_3) \qquad (x^2+x)y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

Montrer que (E_3) admet sur $\mathbb{R}$ des solutions polynômes non triviales.
Déterminer ces solutions. Utiliser ces solutions pour intégrer (E_3).

II-4. La condition (P) est-elle suffisante?

III

Recherche de solutions de (E) *développables en série entière.*

On cherche dans cette partie s'il existe une série entière à coefficients réels α_n, non tous nuls, et à rayon de convergence r et dont la somme,

$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n$, définit, sur l'intervalle ouvert $]-r, +r[$ d'absolue convergence, une application φ, solution de (E).

III-1. Supposant l'existence d'une telle solution, écrire la relation de récurrence, notée (S_n), vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$ par les trois coefficients α_n, α_{n+1}, α_{n+2}.

III-2. On étudie dans ce paragraphe le cas $c = 0$.

a. Montrer que sous les hypothèses (H) :

$$(H) \qquad b \neq 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad bn + q \neq 0$$

(E) admet des solutions développables en série entière et déterminer leur rayon de convergence r.

b. Les solutions trouvées en *a.* peuvent-elles être des polynômes?

c. Intégrer l'équation (E_4) :

$$(E_4) \qquad (x^2+x)y'' + (3x+1)y' + y = 0.$$

On déterminera une solution $(]-r, +r[, \varphi)$ de (E_4) développable en série entière. Cette solution, exprimée au moyen de fonctions usuelles, permet-elle de trouver d'autres couples (I, V_1) solutions de (E_4)?

d. On ne fait plus les hypothèses (H) mais on suppose par contre la condition (P) réalisée (voir II-1).

Discuter suivant les valeurs des coefficients de (E) :

i. La possibilité pour (E) d'admettre simultanément deux solutions polynômes linéairement indépendantes. Expliquer le résultat obtenu en II-2 pour (E_3).

ii. La possibilité pour (E) d'admettre simultanément une solution polynôme non triviale et une solution non polynôme développable en série entière.

Application : Déterminer les solutions polynômes de l'équation (E_6) ainsi que ses solutions non polynômes développables en série entière :

$$(E_6) \qquad (x^2+x)y'' + (x-1)y' - y = 0.$$

Exprimer la somme de cette série au moyen de fonctions usuelles et achever, sans calculs supplémentaires, l'intégration de (E_6).

III-3. On étudie dans ce paragraphe le cas

$$c \neq 0 \quad \text{et} \quad b = q = 0.$$

(E) peut-elle admettre une solution polynôme non triviale?

Peut-elle admettre une solution non polynôme développable en série entière? Quel est alors le rayon r de convergence d'une telle série?

IV

Recherche de certaines solutions rationnelles de (E).

Dans toute cette partie u est un réel non nul.

IV-1. Écrire les conditions nécessaires et suffisantes, notées (R_1), liant a, b, c, p, q, s et u pour que l'application Θ définie par $\Theta(x) = \frac{1}{1 - ux}$ soit solution de (E) sur tout intervalle où elle est définie et deux fois dérivable.

Déterminer les solutions de (E_5) qui sont de ce type et en déduire une seconde méthode d'intégration de cette équation.

IV-2. En utilisant la relation (S_n) (voir III-1), écrire les conditions nécessaires et suffisantes, notées (R_2), liant a, b, c, p, q, s et u, pour que (E) admette une solution développable en série entière telle que $\alpha_n = u^n$ (coefficient de x^n).

IV-3. Montrer de deux manières distinctes que les conditions (R_1) et (R_2) sont équivalentes.

IV-4. Montrer qu'une équation (E) de la forme :

$$(ax^2 + bx + c)y'' + 2(2ax + b)y' + 2ay = 0$$

s'intègre très simplement.

Peut-on retrouver ce résultat à l'aide des trois précédentes questions?

Intégrer l'équation (E_6) :

(E_6) $$(2x^2 + 1)y'' + 8xy' + 4y = 0.$$

Existe-t-il un réel non nul u tel que les coefficients de (E_6) et u vérifient les conditions (R_1) (ou les conditions équivalentes (R_2)) ?

IV-5. Intégrer l'équation (E_7) :

(E_7) $$(2x^2 + 3x + 1)y'' + (5x + 3)y' + y = 0.$$

SESSION DE 1978

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 5 heures

0

0.1. Si F et G sont deux parties d'un ensemble E, $F \setminus G$ désigne l'ensemble des éléments de F n'appartenant pas à G.

$\mathbb{R}_+$ est l'ensemble des nombres réels positifs, $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

E_2 est un plan affine euclidien, $\mathcal{E}_2$ son espace vectoriel associé.

La norme euclidienne de $\mathcal{E}_2$ permet de munir E_2 de sa structure canonique d'espace métrique : $d(A, B) = \| \overrightarrow{AB} \|$.

Si A et B sont deux points distincts de E_2, le segment d'extrémités A et B est l'ensemble des points M de E_2 tels qu'il existe $t \in [0, 1]$ vérifiant $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$. On le note $[A, B]$.

Si $O \in E_2$ et $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ on appelle :

cercle de centre O et de rayon ρ l'ensemble

$$\{ M \in E_2 \ / \ d(O, M) = \rho \}.$$

disque fermé de centre O et rayon ρ l'ensemble

$$\{ M \in E_2 \ / \ d(O, M) \leqslant \rho \}.$$

disque ouvert de centre O et de rayon ρ l'ensemble

$$\{ M \in E_2 \ / \ d(O, M) < \rho \}.$$

Tournez la page S. V. P.

Un demi-cercle d'extrémités A et B est l'intersection du cercle de diamètre $[A, B]$ avec l'un des demi-plans fermés délimités par la droite (A, B).

0.2. Dans tout le problème Γ *est une partie non vide de* E_2.

Si M est un point de E_2, la distance de M à Γ est la borne inférieure, notée $d(M, \Gamma)$, de l'ensemble $\{ d(M, P) \ / \ P \in \Gamma \}$. Par exemple (résultat admis) si Γ est une droite et si H est la projection orthogonale de M sur Γ, $d(M, \Gamma) = d(M, H)$.

Si M est un point de E_2 et s'il existe un point P de Γ tel que $d(M, \Gamma) = d(M, P)$, P est appelé projection de M sur Γ. On note $p(M)$ l'ensemble des projections de M sur Γ ($p(M)$ peut être vide).

On appelle relèvement d'un point P de Γ, tout point M de E_2 tel que $P \in p(M)$. On note $r(P)$ l'ensemble des relèvements de P.

Si Γ' est une partie non vide de Γ on note $r(\Gamma')$ la réunion des ensembles $r(P)$ lorsque P décrit Γ'.

Si M est un point du relèvement d'un point P de Γ et si $d(M, P) = k$, $k \in \mathbb{R}_+^*$, on dit que M est un k-relèvement de P et on note $r_k(P)$ l'ensemble des k-relèvements de P et $r_k(\Gamma')$ la réunion des $r_k(P)$ lorsque P décrit Γ'.

On appelle k-sphère d'hypercentre Γ l'ensemble :

$$\{ M \in E_2 \ / \ d(M, \Gamma) = k \}.$$

Nota. — Les raisonnements seront illustrés par des figures; celles-ci ne sauraient dispenser des démonstrations. Les dessins seront effectués directement sur la copie en regard du texte de la démonstration correspondante, exception faite des deux figures qui sont expressément demandées sur papier millimétré.

I

Dans cette partie les ensembles déterminés seront tous représentés par des figures précises.

I.1. Dans cette question Γ est le cercle de centre O et de rayon $\rho \in \mathbb{R}_+^*$.

a. Déterminer $p(M)$ pour tout point M de E_2. Pour tout point P de Γ, déterminer $r(P)$, puis $r_k(P)$.

b. Déterminer la k-sphère d'hypercentre Γ et la comparer à $r_k(\Gamma)$.

c. Si Γ_1 et Γ_2 sont deux cercles de centres distincts et de rayons distincts, déterminer l'ensemble des points équidistants de ces deux cercles : $\{ M \in E_2 \ / \ d(M, \Gamma_1) = d(M, \Gamma_2) \}$. On discutera suivant la position relative de ces deux cercles.

I.2. Reprendre les questions I.1. *a.* et I.1. *b.* dans les deux cas suivants :

i. Γ est le disque fermé de centre O et de rayon ρ.

ii. Γ est le disque ouvert de centre O et de rayon ρ.

I.3. *a.* Reprendre les questions I.1. *a.* et I.1. *b.* lorsque Γ est un segment $[A, B]$. On commencera par déterminer $r(A)$, $r(B)$ et $r(\Gamma \setminus \{A, B\})$.

b. Déterminer l'ensemble des points équidistants des deux segments diagonaux d'un losange. On construira très précisément cet ensemble sur papier millimétré, dans le cas de deux segments de longueurs respectives 2 cm et 8 cm, la petite diagonale du losange étant placée sur le grand axe de la feuille.

I.4. *a.* Reprendre les questions I.1. *a.* et I.1. *b.* lorsque Γ est un demi-cercle d'extrémités A et B (on pourra utiliser les résultats du I.1. et s'inspirer de la méthode utilisée dans I.3. *a.*).

b. Étant donné un triangle équilatéral de sommets A, B et C, on considère le demi-cercle Γ_1 d'extrémités A et B ne contenant pas le milieu de $[A, C]$ et le demi-cercle Γ_2 symétrique de Γ_1 par rapport à la médiatrice de $[B, C]$. Trouver l'ensemble des points équidistants de Γ_1 et de Γ_2.

II

Dans cette partie $\mathcal{E}_2$ et E_2 sont supposés orientés, $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé direct de E_2.

II.1. $\mathcal{I}$ désigne un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ (borné ou non) et $\vec{f}$ une application continûment dérivable de $\mathcal{I}$ dans $\mathcal{E}_2$ telle que la dérivée $\vec{f}'$ ne s'annule en aucun point de $\mathcal{I}$. On considère l'arc géométrique orienté (φ) de représentation paramétrique $(\mathcal{I}, \vec{f})$. Soit $(\vec{t}(u), \vec{n}(u))$ le repère de Frenet correspondant à l'orientation de (φ) au point de paramètre u de (φ). Montrer, pour tout réel λ la continuité de la fonction $\vec{f}_\lambda$ de $\mathcal{I}$ dans $\mathcal{E}_2$ définie par

$$\forall u \in \mathcal{I}, \ \vec{f}_\lambda(u) = \vec{f}(u) + \lambda \vec{n}(u).$$

On appellera (φ_λ) l'arc géométrique de représentation paramétrique $(\mathcal{I}, \vec{f}_\lambda)$.

On désigne par Φ (resp. Φ_λ) l'ensemble des points M de E_2 définis par $\overrightarrow{OM} = \vec{f}(u)$ (resp. $\overrightarrow{OM} = \vec{f}_\lambda(u)$) lorsque u décrit $\mathcal{I}$.

II.2. Montrer que :

$$r_k(\Phi) \subset \Phi_k \cup \Phi_{-k}.$$

II.3. On se place dans le cas où $\mathcal{I} = \mathbb{R}_+^*$ et $\vec{f}(u) = 2au(u\vec{i} + \vec{j})$ a étant un nombre réel strictement positif donné. Étudier suivant les valeurs de λ l'arc (φ_λ) associé à l'arc (φ).

On construira Φ et les quatre Φ_λ correspondant aux quatre valeurs de λ ; $+a$, $-a$, $2a\sqrt{2}$ et $-2a\sqrt{2}$. On fera ce dessin sur une feuille de papier millimétré : $(O, \vec{i})$ est porté par le grand axe de la feuille et est dirigé vers le bas, O est à 8 cm du bord supérieur de la partie millimétrée, $(O, \vec{j})$ est dirigé vers la droite. On prend $a = 1$ et l'unité égale à 2 cm.

II.4. Γ étant la parabole contenant l'ensemble Φ construit au II.3.

a. Déterminer $r(P)$ pour un point P de Γ.

b. Déterminer $r_k(P)$ puis $r_k(\Gamma)$, $k \in \mathbb{R}_+$.

On pourra, soit compléter la figure du II.3. en utilisant une couleur différente, soit faire un dessin à main levée sur la copie.

III

On admettra que si Γ est une partie fermée, non vide, de E_2 pour tout point M de E_2, $p(M)$ est non vide.

On dit que Γ est convexe si, quels que soient deux points A et B de Γ, tout point P de $[A, B]$ appartient à Γ.

La frontière de Γ est l'ensemble des points adhérents simultanément à Γ et à son complémentaire dans E_2.

III.1. Montrer que si Γ est convexe, $p(M)$ a au plus un élément.

III.2. Si P est un point de E_2, on appelle demi-cône de sommet P et de directrice Γ la réunion $\mathcal{C}(P, \Gamma)$ des demi-droites fermées, d'origine P, contenant au moins un point de Γ.

a. Montrer que si Γ est convexe, pour tout point P de E_2, $\mathcal{C}(P, \Gamma)$ est convexe.

Tournez la page S. V. P.

b. Montrer que tout demi-cône convexe $\mathscr{C}$, distinct de E_2, est inclus dans au moins un demi-plan dont la frontière contient le sommet de $\mathscr{C}$.

c. Montrer que l'intersection de deux demi-plans est en général un demi-cône convexe. Enoncer et démontrer une réciproque.

III.3. Montrer que si Γ est convexe et P non intérieur à Γ, $\mathscr{C}(P, \Gamma)$ est inclus dans au moins un demi-plan dont la frontière (D) contient P.

Si P appartient à la frontière de Γ, toute droite (D) frontière d'un tel demi-plan est appelée droite d'appui de Γ passant par P. S'il passe par P au moins deux droites d'appui de Γ on dit que P est un coin de Γ.

III.4. Γ étant une partie fermée convexe de E_2 :

a. Déterminer $r(P)$ pour un point P de la frontière de Γ.

b. Donner une description de la *k*-sphère d'hypercentre Γ.

SESSION DE 1979

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 5 heures

Préambule : *Il est expressément demandé aux candidats de traiter d'abord les parties I et II. De traiter ensuite la partie IV en admettant les résultats de III, et de ne justifier ces derniers que s'ils disposent encore de temps à la fin de l'épreuve.*

Dans tout le problème N, Z, R désignent respectivement l'ensemble des entiers naturels, des entiers relatifs, des réels.

On désigne par C_n^p $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ $p \leqslant n$ et $0 < n$ le coefficient de x^p dans le développement de $(x+1)^n$.

Pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ $a < b$, on note $C^\infty([a,b])$ l'espace vectoriel des fonctions réelles définies sur $[a,b]$ et indéfiniment dérivables sur cet intervalle.

On notera i un nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

I

On considère la fonction φ_0 définie sur R par :

$$\text{pour } x \neq 0 \quad \varphi_0(x) = \frac{x}{e^x - 1} \quad \text{et} \quad \varphi_0(0) = 1.$$

1.1. Montrer que φ_0 est continûment dérivable sur R. Tracer la représentation graphique de φ_0 dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé.

1.2. Démontrer que la fonction ψ définie sur R par :

$$\psi(x) = \varphi_0(x) - 1 - x\varphi_0'(0)$$

est une fonction paire.

Établir l'identité :

$$\text{pour tout } x \neq 0 \quad \varphi_0(x) = \frac{x}{2}\left(\coth\frac{x}{2} - 1\right).$$

II

A

2.A.1. Étant donnés deux entiers n et p tels que $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 2$, on pose :

$$S_p(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}.$$

Tournez la page S. V. P.

Montrer rapidement que $S_p = \lim\limits_{n\to\infty} S_p(n)$ existe et établir les inégalités : $1 \leqslant S_p \leqslant 1 + \dfrac{1}{p-1}$.

En déduire la limite de la suite $(S_p)_{p \geqslant 2}$.

2.A.2. On considère la série entière $f(t) = \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{S_{2p+2}}{\pi^{2p+2}} t^{2p}$.

Quel est le rayon de convergence R de cette série ?

On note alors $f_N(t) = \displaystyle\sum_{p=0}^{N} (-1)^p \frac{S_{2p+2}}{\pi^{2p+2}} t^{2p}$ la somme des N + 1 premiers termes de la série $f(t)$.

Montrer que : $f_N(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t^2 + n^2\pi^2} + (-1)^N \left(\frac{t}{\pi}\right)^{2N+2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2N+2}(t^2 + n^2\pi^2)}$.

En déduire que pour tout t fixé, $|t| < \mathrm{R}$,

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t^2 + n^2\pi^2}.$$

B

2.B.1. Démontrer que pour tout réel a et tout entier p

$$\operatorname{sh}(2p+1)a = \sum_{q=0}^{p} C_{2p+1}^{2q+1} (\operatorname{ch} a)^{2p-2q} (\operatorname{sh} a)^{2q+1}.$$

En déduire l'existence, pour tout entier naturel p, d'un polynôme R_p de R[X] tel que :

$$R_p(\operatorname{th} a) = \frac{\operatorname{sh}(2p+1)a}{(\operatorname{ch} a)^{2p+1}}.$$

2.B.2. Montrer que les zéros de R_p sont tous simples et sont les images dans C du segment $[-p\,;p]$ de Z par l'application définie par :

$$n \longmapsto x_n \;;\quad x_n = i\,\operatorname{tg}\frac{n\pi}{2p+1}.$$

En déduire que $\dfrac{R_p'(X)}{R_p(X)} = \dfrac{1}{X} + \displaystyle\sum_{n=1}^{p} \frac{2X}{X^2 + \operatorname{tg}^2 \frac{n\pi}{2p+1}}$.

2.B.3. Montrer que :

$$R_p'(\operatorname{th} a) = \frac{2p+1}{(\operatorname{ch} a)^{2p}} [\operatorname{ch}(2p+1)a \,.\, \operatorname{ch} a - \operatorname{sh}(2p+1)a \,.\, \operatorname{sh} a]$$

puis que, si $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$:

$$\left(\coth x - \operatorname{th}\frac{x}{2p+1}\right)\operatorname{ch}^2\frac{x}{2p+1} = \frac{1}{2p+1}\coth\frac{x}{2p+1} + \frac{1}{2p+1}\sum_{n=1}^{p} \frac{2\operatorname{th}\frac{x}{2p+1}}{\operatorname{th}^2\frac{x}{2p+1} + \operatorname{tg}^2\frac{n\pi}{2p+1}}.$$

2.B.4. Pour tout couple $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, $(x, n) \neq (0, 0)$, on considère la suite $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

pour tout $p < n$ $\quad u_p = 0$

$$\text{pour tout } p \geqslant n \quad u_p = \frac{1}{2p+1} \frac{2\,\text{th}\dfrac{x}{2p+1}}{\text{th}^2\dfrac{x}{2p+1} + \text{tg}^2\dfrac{n\pi}{2p+1}}$$

a. Établir la convergence de u. Préciser sa limite en fonction de (x, n).

b. Si, de plus, $n \neq 0$, démontrer que, pour tout p, on a l'inégalité

$$|u_p| \leqslant \frac{2|x|}{n^2\pi^2}.$$

c. Toujours pour $n \neq 0$ on considère la suite $A : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$$\text{pour tout } p \quad A_p = \sum_{n=1}^{\infty} u_p.$$

Montrer que la suite A est convergente et que sa limite est

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 + n^2\pi^2}.$$

d. Montrer alors que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\coth x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2 + n^2\pi^2}.$$

2.B.5. Montrer enfin que φ_0 est développable en série entière sur $]-2\pi, 2\pi[$ et que :

$$\varphi_0(u) = 1 - \frac{u}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{S_{2n} \cdot u^{2n}}{\pi^{2n} \cdot 2^{2n-1}}.$$

Dans toute la suite on posera : $\quad \beta_n = (-1)^{n-1} \dfrac{(2n)!\, S_{2n}}{\pi^{2n} \cdot 2^{2n-1}}.$

III

3.1. On considère la fonction φ_x définie sur $\mathbb{R}$, pour x fixé dans $\mathbb{R}$,

$$\text{pour } u \neq 0 \quad \varphi_x(u) = \frac{u\, e^{ux}}{e^u - 1} \quad \text{et} \quad \varphi_x(0) = 1.$$

Montrer que φ_x est continue sur $\mathbb{R}$ et développable en série entière pour $|u| < 2\pi$; on note

$$\varphi_x(u) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{u^n}{n!}.$$

Établir la relation de récurrence :

$$B_n(x) = x^n - \frac{1}{n+1} \sum_{q=2}^{n+1} C_{n+1}^q B_{n+1-q}(x).$$

Tournez la page S. V. P.

3.2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

a. B_n est un polynôme de degré n en x.

b. $B_n(0) = B_n(1)$ pour tout $n \neq 1$ (on pourra comparer φ_0 et φ_1).

c. $B_{2n}(0) = \beta_n$ et $B_{2n+1}(0) = 0$ pour tout entier $n > 0$.

En déduire une relation de récurrence entre les β_n.

d. $B'_{n+1} = (n+1) B_n$.

3.3. Déduire de cette étude :

a. B_k pour $0 \leqslant k \leqslant 6$.

b. β_k pour $1 \leqslant k \leqslant 3$.

En déduire les valeurs de S_2, S_4 et S_6.

3.4. On pose maintenant : $C_0(x) = x - \dfrac{1}{2}$

$$\text{et} \quad C_n(x) = \frac{1}{n+1} [B_{n+1}(x) - B_{n+1}(0)].$$

Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ $\quad C'_{2n-1} = (2n-1)\, C_{2n-2}$

et $C'_{2n} = 2n\, C_{2n-1} + \beta_n$.

Établir, par récurrence sur n, la propriété suivante, vraie pour $n \geqslant 1$:

$$(P_n) \begin{cases} C_{2n-1} \text{ garde un signe constant sur }]0,1[\\ C_{2n} \text{ s'annule une seule fois sur }]0,1[\end{cases}$$

(On remarque que les C_n s'annulent en 0 et en 1.)

IV

On note $(C_n)_{n \geqslant 0}$ la suite de polynômes vérifiant les propriétés du paragraphe 3.4. *La forme explicite des C_n, pour $n \geqslant 1$, n'intervient pas dans cette partie.*

Étant donnée une fonction $f \in C^\infty([0,1])$, on pose :

$$I_n(f) = \int_0^1 C_{2n}(x) f^{(2n+2)}(x)\, dx$$

$f^{(2n+2)}$ est la dérivée $(2n+2)$-ième de f.

4.1. Calculer $I_0(f)$.

4.2. Montrer que si $n \geqslant 1$

$$I_n(f) = 2n(2n-1)\, I_{n-1}(f) - \beta_n [f^{(2n)}(1) - f^{(2n)}(0)].$$

4.3. Montrer que, pour tout n, il existe $\xi \in [0,1]$ tel que :

$$I_n(f) = \frac{\beta_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)} f^{(2n+2)}(\xi).$$

On pourra appliquer le théorème de la moyenne à

$$\int_0^1 C_{2n+1}(x) \cdot f^{(2n+2)}(x) \cdot dx$$ en tenant compte de la propriété (P_{n+1}) du § 3.4.

4.4. Déduire des résultats précédents que :

a. Si $f \in C^{\infty}([0,1])$, pour tout $n \geq 1$, il existe $\xi \in [0,1]$ tel que

$$f(1) - f(0) = \frac{1}{2}[f'(0) + f'(1)] - \sum_{q=1}^{n} \frac{\beta_q}{(2q)!}[f^{(2q-1)}(1) - f^{(2q-1)}(0)] - \frac{\beta_{n+1}}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi).$$

b. Si $g \in C^{\infty}([a,b])$, pour tout $n \geq 1$, il existe $\xi \in [a,b]$ tel que :

$$\int_a^b g(s)\,ds =$$

$$\frac{b-a}{2}[g(a)+g(b)] - \sum_{q=1}^{n} \frac{\beta_q}{(2q)!}(b-a)^{2q}[g^{(2q-1)}(b) - g^{(2q-1)}(a)] - \frac{\beta_{n+1}}{(2n+2)!}(b-a)^{(2n+3)} g^{(2n+2)}(\xi).$$

4.5. *Application numérique.*

On considère les intervalles $[k, k+1]$ $k \in \{10, 11, \dots, 19\}$, l'entier $n = 2$ et la fonction g donnée par $g(x) = \frac{1}{x}$.

On donne $\beta_1 = \frac{1}{6}$, $\beta_2 = -\frac{1}{30}$, $\beta_3 = \frac{1}{42}$, donner un majorant de la différence :

$$\text{Log}\,2 - \left(\frac{1}{20} + \sum_{q=11}^{19} \frac{1}{q} + \frac{1}{40} - \frac{1}{1.600} + \frac{1}{128.10^4}\right).$$

2ème Composition de 179.

Soit φ une application de l'ensemble R des nombres réels dans lui-même, vérifiant les conditions suivantes :

i. Quels que soient les nombres réels λ et μ, $\varphi(\lambda + \mu) = \varphi(\lambda) + \varphi(\mu)$.

ii. Quels que soient les nombres réels λ et μ, $\varphi(\lambda\mu) = \varphi(\lambda)\varphi(\mu)$.

iii. $\varphi(1) = 1$.

1.1. Calculer $\varphi(\rho)$ pour tout nombre rationnel ρ.

1.2. Démontrer que, si un nombre réel λ est positif, $\varphi(\lambda)$ l'est aussi. En déduire le sens de variation de la fonction φ.

1.3. Démontrer que $\varphi(\lambda) = \lambda$ pour tout nombre réel λ.

II

Soient P et P' deux plans affines réels (d'espaces vectoriels associés $\vec{P}$ et $\vec{P'}$) et f une application *bijective* de P sur P' qui transforme trois points alignés quelconques de P en des points alignés de P'.

2.1. 2.1.1. Soient a, b, c trois points de P tels que $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ soient alignés : démontrer que a, b, c sont eux-mêmes alignés [on pourra, supposant a, b, c non alignés, montrer que l'image par f de tout point z de P serait alignée avec $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$]

2.1.2. Montrer que, pour toute droite $D \subset P$, $f(D)$ est une droite de P'; et que f transforme des droites parallèles en droites parallèles.

2.2. On munit le plan affine P d'une origine O. On n'autorise dans cette question que des constructions dont chaque pas consiste, soit à tracer la droite passant par deux points distincts déjà connus, soit à mener par un point connu la parallèle à une droite connue, soit à choisir un point auxiliaire. On tracera les figures à proximité du texte.

2.2.1. Supposant donnés O et deux points x et y de P, construire le point s tel que $\overrightarrow{Os} = \overrightarrow{Ox} + \overrightarrow{Oy}$ (ne pas omettre le cas où O, x et y sont alignés).

2.2.2. Soient $\vec{v}$ un vecteur non nul de $\vec{P}$ et λ, μ des nombres réels. Supposant donnés O et les points x, l, m tels que $\overrightarrow{Ox} = \vec{v}$, $\overrightarrow{Ol} = \lambda\vec{v}$, $\overrightarrow{Om} = \mu\vec{v}$, construire le point p tel que $\overrightarrow{Op} = \lambda\mu\vec{v}$.

2.3. A tout vecteur $\vec{v} \in \vec{P}$, on associe le point x de P tel que $\overrightarrow{Ox} = \vec{v}$, puis on note $F(\vec{v})$ le vecteur $\overrightarrow{f(0)f(x)}$ de $\vec{P'}$, ce qui définit une application F de $\vec{P}$ dans $\vec{P'}$.

2.3.1. Démontrer, quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\vec{P}$, l'égalité

$$F(\vec{u} + \vec{v}) = F(\vec{u}) + F(\vec{v}).$$

2.3.2. Étant donné un vecteur $\vec{v} \neq \vec{O}$ de $\vec{P}$, démontrer l'existence d'une fonction $\varphi_{\vec{v}}$ de R dans lui-même telle que l'on ait, pour tout nombre réel λ :

$$F(\lambda\vec{v}) = \varphi_{\vec{v}}(\lambda)\,F(\vec{v}).$$

2.3.3. Prouver que la fonction $\varphi_{\vec{v}}$ ne dépend pas de $\vec{v}$, ce qui permettra de la noter désormais φ.

2.3.4. Démontrer, en utilisant la partie I, que F est linéaire et f affine. Énoncer un théorème qui résume le contenu de la partie II.

III

Dans cette partie E désigne un espace affine de dimension 3; O est un point fixé de E; $\mathcal{D}_0$ est l'ensemble des droites de E passant par O; $\mathcal{P}_0$ est l'ensemble des plans de E passant par O.

Dans les questions 3.1, 3.2, et 3.3 on donne une application *bijective* α de l'ensemble $\mathcal{D}_0$ sur lui-même qui transforme trois droites coplanaires quelconques en droites coplanaires.

Capes 1979, épreuve II

Ce travail fait à partir d'une photocopie peut présenter quelques erreurs, me les signaler à l'adresse suivante : `jeaneric.richard(a)wanadoo.fr` (changer (a) en @). Bon courage ! Version du 2 août 2010 à 11h00.

Première partie.

Soit φ une application de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels dans lui-même vérifiant les condition suivantes :

i) quels que soient les nombres réels λ et μ, $\varphi(\lambda+\mu)=\varphi(\lambda)+\varphi(\mu)$.

ii) Quels que soient les nombres réels λ et μ, $\varphi(\lambda\mu)=\varphi(\lambda)\varphi(\mu)$.

iii) $\varphi(1)=1$.

1. Calculer $\varphi(\rho)$ pour tout nombre rationnel ρ.
2. Démontrer que, si un nombre réel λ est positif, $\varphi(\lambda)$ l'est aussi. En déduire le sens de variation de la fonction φ.
3. Démontrer que $\varphi(\lambda)=\lambda$ pour tout nombre réel λ.

Deuxième partie.

Soient P et P' deux plans affines réels (d'espaces vectoriels associés $\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{P}'$) et f une application *bijective* de P sur P' qui transforme trois points alignés quelconques de P en des points alignés de P'.

1. a) Soient a, b, c trois points de P tels que $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ soient alignés : démontrer que a, b, c sont eux-même alignés.
   (On pourra, supposant a, b, c non alignés, montrer que l'image par f de tout point x de P serait alors alignée avec $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$).

   b) Montrer que, pour toute droite $D\subset P$, $f(D)$ est une droite de P' ; et que f transforme des droites parallèles en des droites parallèles.

2. On munit le plan affine P d'une origine O. On n'autorise dans cette question que des constructions dont chaque pas consiste, soit à tracer la droite passant par deux points distincts déjà connus, soit à mener par un point connu la parallèle à une droite connue, soit à choisir un point auxiliaire. On tracera les figures à proximité du texte.

   a) Supposant donnés O et deux points x et y de P, construire le point s tel que $\overrightarrow{Os}=\overrightarrow{Ox}+\overrightarrow{Oy}$ (ne pas omettre le cas où O, x et y sont alignés).

   b) Soient $\overrightarrow{v}$ un vecteur non nul de P et λ, μ des nombres réels.
   Supposant donnés O et les points x, ℓ, m tels que $\overrightarrow{Ox}=\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{O\ell}=\lambda\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{Om}=\mu\overrightarrow{v}$, construire le point p tel que $\overrightarrow{Op}=\lambda\mu\overrightarrow{v}$.

3. A tout vecteur $\overrightarrow{v}\in\overrightarrow{P}$, on associe le point x de P tel que $\overrightarrow{Ox}=\overrightarrow{v}$, puis on note $F(\overrightarrow{v})$ le vecteur $\overrightarrow{f(O)f(x)}$ de $\overrightarrow{P}'$, ce qui définit une application de $\overrightarrow{P}$ dans $\overrightarrow{P}'$.

   a) Démontrer que quels que soient les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de $\overrightarrow{P}$, l'égalité :
   $$F(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})=F(\overrightarrow{u})+F(\overrightarrow{v}).$$

   b) Étant donné un vecteur $\overrightarrow{v}\neq\overrightarrow{O}$ de $\overrightarrow{P}$, démontrer l'existence d'une fonction $\varphi_{\overrightarrow{v}}$ de $\mathbb{R}$ dans lui-même telle que l'on ait, pour tout nombre réel λ :
   $$F(\lambda\overrightarrow{v})=\varphi_{\overrightarrow{v}}(\lambda)F(\overrightarrow{v}).$$

   c) Démontrer que la fonction $\varphi_{\overrightarrow{v}}$ ne dépend pas de $\overrightarrow{v}$, ce qui permet d'ailleurs de la noter désormais φ.

   d) Démontrer, en utilisant la première partie, que F est linéaire et f est affine.
   Énoncer un théorème qui résume le contenu de la seconde partie.

Troisième partie.

Dans cette partie E désigne un espace affine de dimension 3 ; O est un point fixé de E ; $\mathscr{D}_O$ est l'ensemble des droites de E passant par O ; $\mathscr{P}_O$ est l'ensemble des plans de E contenant le point O.

Dans les questions 1., 2. et 3. on donne une application *bijective* α de l'ensemble $\mathscr{D}_O$ sur lui-même qui transforme trois droites coplanaires quelconques en droites coplanaires.

1. Soient D_1, D_2 et D_3 des droites de $\mathscr{D}_O$ telles que $\alpha(D_1)$, $\alpha(D_2)$, $\alpha(D_3)$ soient coplanaires : montrer qu'elles sont elles-mêmes coplanaires.

2. On choisit dans $\mathscr{P}_O$ un plan P_O : montrer que les transformés par α des droites de $\mathscr{D}_O$ incluses dans P_O sont exactement les droites de $\mathscr{D}_O$ incluses dans un certain plan P'_0.

3. Soient P et P' deux plans affines ne contenant pas O et respectivement parallèles à P_O et à P'_0. En utilisant ces plans et la conclusion de la partie II, construire une application bijective g de E sur lui-même telle que l'on ait $\alpha(D) = g(D)$ pour toute droite $D \in \mathscr{D}_O$ (on pourra caractériser l'application linéaire associée l par ses restrictions à deux sous-espaces vectoriels supplémentaires convenables).

4. Soit β une application bijective de $\mathscr{P}_O$ sur lui-même telle que pour tout triplet $(P_1,\ P_2,\ P_3)$ des plans de $\mathscr{P}_O$ ayant une droite commune, les plans $\beta(P_1)$, $\beta(P_2)$, $\beta(P_3)$ aient une droite commune.
Démontrer l'existence d'une application bijective g de E sur lui-même telle que l'on ait $\beta(P) = g(P)$ pour tout plan $P \in \mathscr{P}_O$.

Quatrième partie.

On note maintenant :

- E un espace vectoriel *euclidien* de dimension 3,
- $\mathscr{D}$ l'ensemble de ses droites vectorielles,
- $\mathscr{P}$ l'ensemble de ses plans vectoriels,
- $O(E)$ le groupe de ses isométries vectorielles,
- $O^+(E)$ le sous groupe de $O(E)$ formé des rotations vectorielles,

(on parlera désormais de *droites*, *plans*, *isométries*, *rotations*, l'adjectif **vectoriel** étant à chaque fois sous-entendu)

- $u \circ v$ la composée des applications u et v,
- Id_E l'application identique de E dans lui-même,
- u^{-1} l'application réciproque d'une bijection u,
- s_V la symétrie (orthogonale) par rapport à un sous espace vectoriel V de E.

1. On fixe dans cette question une isométrie g.
   a) Montrer que l'application i_g qui à toute isométrie u fait correspondre $g \circ u \circ g^{-1}$ est un automorphisme du groupe $O(E)$. Comparer i_g et i_{-g}.
   b) Soit V un sous espace vectoriel de E ; démontrer que $i_g(s_V)$ est la symétrie par rapport à un sous espace vectoriel que l'on précisera.
   c) On donne un rotation u d'axe D et d'angle θ relativement à des orientations choisies sur E et sur D : décrire $i_g(u)$. Montrer que $i_g(O^+(E)) = O^+(E)$.

2. Étant donné une isométrie g, déterminer les isométries g' telles que $i_{g'} = i_g$.

Dans les questions 3. à 7. on se donne un automorphisme quelconque h du groupe $O(E)$.

3. a) Déterminer les isométries u telles que $u^2 = Id_E$. Mettre en évidence, dans l'ensemble des isométries trouvées, un sous ensemble qui engendre le groupe $O(E)$ des isométries.
   b) Étant donné deux plans P et Q, établir l'existence d'une isométrie g (par exemple une rotation) telle que :

$$s_Q = g \circ s_P \circ g^{-1}.$$

c) Déduire des questions 3a et 3b que, pour tout plan $P \in \mathscr{P}$, $h(s_P)$ est la symétrie par rapport à un plan que l'on notera $\beta(P)$. Montrer que l'application $\beta : \mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{P}$ est bijective.

4. Montrer que $h(O^+(E)) = O^+(E)$. En particulier, si $D \in \mathscr{D}$, déterminer la nature de $h(s_D)$.

5. a) Trouver une condition nécessaire et suffisante, portant sur la transformée $s_P \circ s_Q$, pour que deux plans P et Q soient perpendiculaires.

b) Étudier les transformés par β de deux plans perpendiculaires, puis de trois plans ayant une droite vectorielle commune.

6. Démontrer que, si une application l de E dans lui même est linéaire et conserve l'orthogonalité des vecteurs, elle est composée d'une homothétie et d'une isométrie vectorielle.

7. Déduire de l'étude précédente et la conclusion de III.4. l'existence d'une rotation r telle que $h = i_r$.

8. Déterminer les automorphismes du groupe $O^+(E)$.

CAPES 1979 2ème composition — SOLUTION DE DANY-JACK MERCIER

1.1 φ est un morphisme de groupe additif de $\mathbb{R}$ dans lui-même, donc $\varphi(0)=0$.
(D'ailleurs $\varphi(0)=\varphi(0)+\varphi(0) \Rightarrow \varphi(0)=0$). Par récurrence $\varphi(n)=n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ ($\varphi(1)=1$ et $\varphi(n+1)=\varphi(n)+\varphi(1)=n+1$), puis si $n\in\mathbb{N}$, $\varphi(-n)+\varphi(n)=\varphi(-n+n)=\varphi(0)=0$ entraîne $\varphi(-n)=-\varphi(n)=-n$.

Si $n\neq 0$, $\varphi\left(n.\frac{1}{n}\right)=\varphi(1)=1 \Rightarrow \varphi\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{\varphi(n)}=\frac{1}{n}$.

Si $n,p\in\mathbb{N}$ avec $p\neq 0$, $\varphi\left(\frac{n}{p}\right)=\varphi\left(n.\frac{1}{p}\right)=\varphi(n).\varphi\left(\frac{1}{p}\right)=n.\frac{1}{p}=\frac{n}{p}$.

Donc $\boxed{\varphi(\rho)=\rho}$ pour tout $\rho\in\mathbb{Q}$.

1.2 * Si λ est positif, il existe $\mu\in\mathbb{R}$ tel que $\mu^2=\lambda$ d'où $\varphi(\mu)^2=\varphi(\lambda)\geq 0$.

* Si $n\leq p$, $\varphi(p)=\varphi(n+p-n)=\varphi(n)+\underbrace{\varphi(p-n)}_{\geq 0}$ entraîne $\varphi(n)\leq\varphi(p)$.

1.3 Il existe une suite croissante $(r_n)_n$ et une suite décroissante $(s_n)_n$ de nbres rationnels tendant vers λ.

De $r_n\leq\lambda\leq s_n$ on déduit $\varphi(r_n)\leq\varphi(\lambda)\leq\varphi(s_n)$ ie $r_n\leq\varphi(\lambda)\leq s_n$ et en passant à la limite : $\lambda\leq\varphi(\lambda)\leq\lambda$ soit $\boxed{\varphi(\lambda)=\lambda \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}}$

NB : Cette première partie montre que seule l'identité est un morphisme de corps de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2.1.1

Supposons que a, b, c ne sont pas alignés, et considérons les droites ab et ac.
Si $y\in ab$, $f(y)$ sera sur la dte $f(a)f(b)=D$.
Si $z\in ac$, $f(z)$ " " $f(a)f(c)=D$.
Si $x\in P$ est quelconque, il suffira de tracer une dte Δ passant par x et coupant ab et ac en 2 pts y et z pour pouvoir affirmer que $f(x)$ appartient à la dte $f(y)f(z)=D$.
Ainsi $f(P)\subset D$ ce qui est absurde puisque f est bijective.

2.1.2 * Soit D une droite de P et a, b 2 pts de D. f conserve l'alignement, donc si $x \in D$, $f(x) \in f(a)f(b) \doteq \Delta$. Ainsi $f(D) \subset \Delta$.
Réciproquement, si $y \in \Delta$, il existe $x \in P$ tel que $f(x) = y$ et comme $f(a) f(b) f(x)$ sont alignés, (2.1.1) entraîne l'alignement de a, b, x ie $x \in D$. Conclusion : $\boxed{f(D) = \Delta}$ ie $\boxed{f(D) \text{ est une dte de } P'}$

* Si $D /\!/ D'$ et si les dtes $f(D)$ et $f(D')$ se coupaient en y, il existerait $x \in P$ tel que $y = f(x)$, et comme f est bijective : $x \in D \cap D'$ ce qui est absurde.

2e méthode : f étant bijective, si $D /\!/ D'$:

$$f(D) \cap f(D') = f(D \cap D') = f(\emptyset) = \emptyset \quad \text{ie } f(D) /\!/ f(D').$$

2.2.1 Si O, x, y ne sont pas alignés :

Si O, x, y alignés :

1e méthode : On choisit O' et on construit x' tel que $\vec{Ox} = \vec{O'x'}$:

2e méthode : On choisit $O' \notin xy$ puis on construit O'' tel que $\vec{Ox} = \vec{OO'} + \vec{OO''}$
On trace ensuite $\vec{Os} = \vec{OO'} + \vec{OO''} + \vec{Oy}$ en utilisant le cas où O, x, y ne sont pas alignés.

Ici :
$\vec{OO'} + \vec{Oy} = \vec{Os_1}$
$\vec{Os_1} + \vec{OO''} = \vec{Os}$

NB : s_1 ne peut pas être aligné avec O, O'' sinon O, s, O'', s_1 seraient alignés entraînerait O'' sur Ox, absurde (car $O' \notin Ox$).

2.2.2

Soit $n \notin Ox$. La parallèle à xn passant par m coupe On en s et (Thalès) $\vec{Os} = \mu \vec{On}$.

La parallèle à xs passant par l coupe On en t et (Thalès) :

$$\vec{Ot} = \lambda \vec{Os} = \lambda\mu \vec{On}$$

$\vec{Ol} = \lambda \vec{v}$
$\vec{Om} = \mu \vec{v}$
$\vec{Op} = \lambda\mu \vec{v}$?

La parallèle à xn passant par t coupe Ox en p cherché car $\vec{Op} = \lambda\mu\vec{v}$.

2.3.1 Si $\vec{u} = \vec{Ox}$, $\vec{v} = \vec{Oy}$ et $\vec{Ox} + \vec{Oy} = \vec{Os}$, s est l'intersection de la // à Oy passant par x et de la // à Ox passant par y. f conservant l'alignement et le parallélisme (2.1.2), $f(s)$ sera l'intersection de la // à $f(o)f(y)$ passant p[ar] $f(x)$ et de la // à $f(o)f(x)$ passant par $f(y)$, donc :

$$\overrightarrow{f(o)f(s)} = \overrightarrow{f(o)f(x)} + \overrightarrow{f(o)f(y)}$$

ie $$F(\vec{u}+\vec{v}) = F(\vec{u}) + F(\vec{v})$$

(NB : le raisonnement tient même si $O\,x\,y$ sont alignés puisque le 2.2.1 permet encore de se ramener à des intersections de parallèles)

2.3.2 Si $\vec{Os} = \lambda \vec{Ox}$, $O\,x\,s$ sont alignés donc $f(o)\,f(x)\,f(s)$ aussi et il existe un réel $\varphi_{\vec{v}}(\lambda)$ tel que $\overrightarrow{f(o)f(s)} = \varphi_{\vec{v}}(\lambda).\overrightarrow{f(o)f(x)}$ ie $F(\lambda\vec{v}) = \varphi_{\vec{v}}(\lambda)F($

2.3.3 On a :

$$F(\lambda\vec{u}+\lambda\vec{v}) = F(\lambda(\vec{u}+\vec{v})) = \varphi_{\vec{u}+\vec{v}}(\lambda)F(\vec{u}+\vec{v}) = \varphi_{\vec{u}+\vec{v}}(\lambda)F(\vec{u}) + \varphi_{\vec{u}+\vec{v}}(\lambda)F(\vec{v}) \quad (1$$

et

$$F(\lambda\vec{u}+\lambda\vec{v}) = F(\lambda\vec{u}) + F(\lambda\vec{v}) = \varphi_{\vec{u}}(\lambda)F(\vec{u}) + \varphi_{\vec{v}}(\lambda)F(\vec{v}) \quad (2)$$

* Si $F(\vec{u})$ et $F(\vec{v})$ sont indépendants, (1) et (2) entraînent $\varphi_{\vec{u}}(\lambda) = \varphi_{\vec{u}+\vec{v}}(\lambda) = \varphi_{\vec{v}}($
* Si $F(\vec{u})$ et $F(\vec{v})$ sont dépendants, notons $\vec{u} = \vec{Ox}$ et $\vec{v} = \vec{Oy}$ de sorte que $F(\vec{u}) = \overrightarrow{f(o)f(x)}$ et $F(\vec{v}) = \overrightarrow{f(o)f(y)}$. Il suffit de choisir $f(z)$ non situé sur la d^te^ $f(o)f(x)f(y)$ pour utiliser le raisonnement précédent et conclure :

$\bullet f(z)$
$f(o)$ $f(x)$ $f(y)$

$$\varphi_{\vec{u}}(\lambda) = \varphi_{\vec{w}}(\lambda) = \varphi_{\vec{v}}(\lambda) \qquad \text{où } \vec{w} = \vec{Oz}$$

2.3.4 Si $\vec{v} \in \vec{P} \setminus \{\vec{0}\}$, $F((\lambda+\mu)\vec{v}) = \varphi(\lambda+\mu)F(\vec{v}) = \varphi(\lambda)F(\vec{v}) + \varphi(\mu)F(\vec{v})$

entraine $\boxed{\varphi(\lambda+\mu) = \varphi(\lambda)+\varphi(\mu)}$ car $F(\vec{v}) \neq \vec{0}$.

De plus $F(\lambda\mu\vec{v}) = \varphi(\lambda\mu)F(\vec{v}) = \varphi(\lambda).\varphi(\mu)F(\vec{v}) \Rightarrow \boxed{\varphi(\lambda\mu) = \varphi(\lambda)\varphi(\mu)}$

φ est donc un morphisme de corps (non nul) de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. C'est $Id_{\mathbb{R}}$ d'après la première partie.

<u>Ccl</u> : $F(\lambda\vec{v}) = \lambda F(\vec{v})$. $F \in \mathcal{L}(\vec{P}, \vec{P}')$ et f sera affine de partie linéaire F.
et on a prouvé que :

> Toute application bijective d'un plan affine P sur un plan affine P' conservant l'alignement est une application affine.

(<u>NB</u> : résultat valable en dimensions quelconques)

3.1 Soient D_1, D_2, D_3 non coplanaires et $\alpha(D_1), \alpha(D_2), \alpha(D_3)$ coplanaires.
Si D est incluse dans le plan D_1, D_2 alors $\alpha(D)$ sera dans le plan $\alpha(D_1)\alpha(D_2)$ que l'on notera P.

Si D est dans le plan $D_1 D_3$, $\alpha(D)$ sera aussi dans P.

Si $D \in \mathcal{D}_0$, il existe un plan Q contenant D et coupant les plans $D_1 D_2$ et $D_1 D_3$ suivant 2 droites D' et D''. Par hypothèse $\alpha(D)$ sera incluse dans le plan $\alpha(D')\alpha(D'')$ et comme $\alpha(D')$ et $\alpha(D'')$ sont incluses dans P, $\alpha(D)$ sera incluse dans P.

Finalement $\alpha(D) \subset P$ pour tout $D \in \mathcal{D}_0$, ce qui contredit la bijectivité de α

<u>2e méthode</u> : Si D_1, D_2, D_3 n'étaient pas coplanaires, les vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ directeurs de D_1, D_2, D_3 formeraient une base de $\vec{E}$. Soit $D \in \mathcal{D}_0$ de vecteur directeur $\vec{u}$.
$\exists \lambda_i \quad \vec{u} = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \lambda_3\vec{u}_3$
Notons Δ la dte passant par O et de vect. dir. $\vec{v} = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2$

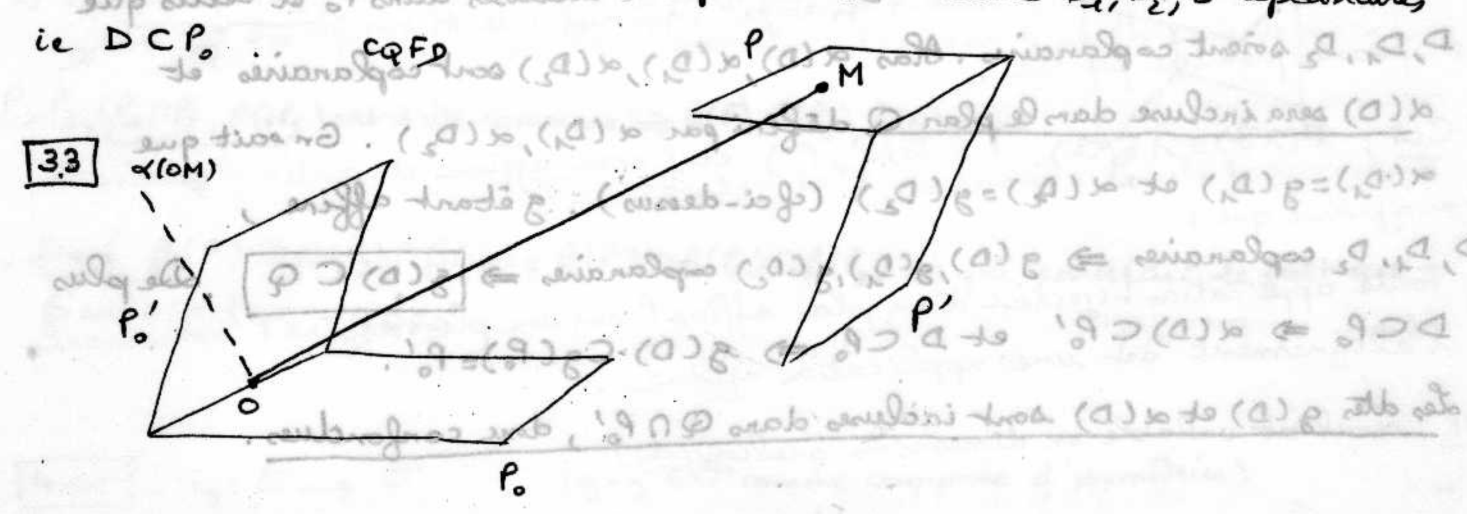
Δ, D_1, D_2 coplanaires $\Rightarrow \alpha(\Delta), \alpha(D_1), \alpha(D_2)$ coplanaires
D, Δ, D_3 coplanaires $\Rightarrow \alpha(D), \alpha(\Delta), \alpha(D_3)$ "

Par suite $\alpha(D)$ sera incluse dans le plan $\alpha(D_1), \alpha(D_2), \alpha(D_3)$ ce qui est absurde puisque $\alpha : \mathcal{D}_0 \to \mathcal{D}_0$ est bijective.

3.2 $P_0 \in \mathcal{P}_0$. Si D_1, D_2, D_3 sont dans $\mathcal{D}_0$ et incluses dans P_0, $\alpha(D_1)\,\alpha(D_2)\,\alpha(D_3)$ seront coplanaires et $\alpha(D_3)$ appartiendra au plan P'_0 passant par $\alpha(D_1)$ et $\alpha(D_2)$.

Réciproquement, si Δ est une dte de $\mathcal{D}_0$ incluse dans P'_0, il existe $D \in \mathcal{D}_0$ telle que $\alpha(D) = \Delta$ et $\alpha(D_1)\,\alpha(D_2)\,\alpha(D)$ coplanaires entraîne D_1, D_2, D coplanaires ie $D \subset P_0$. CQFD

3.3



Si g existe et si $D, D' \in \mathcal{D}_0$, $g(O) = g(D \cap D') = g(D) \cap g(D') = O$. g sera donc parfaitement déterminée par sa partie linéaire.

Soient 2 plans P et P' resp. parallèles à P_0 et P'_0 et ne contenant pas O (P'_0 défini en 3.

$M \in P \Rightarrow M \notin P_0 \Rightarrow OM \not\subset P_0 \Rightarrow \alpha(OM) \not\subset P'_0 \Rightarrow \alpha(OM) \cap P' = \{M'\}$

Posons $M' = g'(M)$. On définit ainsi $g' : P \to P'$, $M \mapsto M'$ qui est bijective (car si $N \in$ $\alpha(OM) \cap P' = \{N\} \Leftrightarrow \alpha(OM) = ON \Leftrightarrow OM = \alpha^{-1}(ON) \Leftrightarrow M$ à l'intersection de P et de la dte passant par O et de direction $\alpha^{-1}(ON)$, unique !).

g' conserve l'alignement car si M_1, M_2, M_3 sont alignés dans P, OM_1, OM_2, OM_3 sont coplanaires donc $\alpha(OM_1), \alpha(OM_2), \alpha(OM_3)$ aussi, et donc M'_1, M'_2, M'_3 seront alignés sur l'intersection de P' et du plan $\alpha(OM_1)\,\alpha(OM_2)\,\alpha(OM_3)$.

Le II montre que g' est une bijection affine de P sur P' d'appl. linéaire $l' \in \mathcal{L}(\vec{P}, \vec{P}$

Soit D une droite de $\mathcal{D}_0$ non incluse dans P_0. Elle coupe P en M et :

$$\vec{E} = \vec{P_0} \oplus \mathbb{R}\,\overrightarrow{OM}$$

Définissons $l \in \mathcal{L}(\vec{E})$ par $l|_{\vec{P_0}} = l'$ et $l(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{Og'(M)}$.

l est bijective car l' l'est et $\overrightarrow{Og'(M)} \notin \operatorname{Im} l' = \vec{P'_0}$.

Soit g l'application affine définie par $g(M) = O + l(\overrightarrow{OM})$. Elle est bijective.

Vérifions que $\forall D \in \mathcal{D}_0 \quad \alpha(D) = g(D)$:

* Si $D \not\subset P_0$, D coupe P en un pt M et en notant $M' = g'(M)$ on a par construction de g' : $g(OM) = g(O)\,g(M) = OM' = \alpha(OM)$ ie $g(D) = \alpha(D)$.

* Si $D \subset P_0$, soient D_1 et D_2 2 droites non incluses dans P_0 et telles que D, D_1, D_2 soient coplanaires. Alors $\alpha(D), \alpha(D_1), \alpha(D_2)$ sont coplanaires et $\alpha(D)$ sera incluse dans le plan Q défini par $\alpha(D_1), \alpha(D_2)$. On sait que $\alpha(D_1) = g(D_1)$ et $\alpha(D_2) = g(D_2)$ (cf ci-dessus). g étant affine, D, D_1, D_2 coplanaires $\Rightarrow g(D), g(D_1), g(D_2)$ coplanaires $\Rightarrow \boxed{g(D) \subset Q}$. De plus $D \subset P_0 \Rightarrow \alpha(D) \subset P_0'$ et $D \subset P_0 \Rightarrow g(D) \subset g(P_0) = P_0'$.

Les dtes $g(D)$ et $\alpha(D)$ sont incluses dans $Q \cap P_0'$, donc confondues.

3.4 Nécessairement $g(O) = O$.

Si $D \in \mathcal{D}_0$, écrivons $D = P_1 \cap P_2$ où $P_i \in \mathcal{P}_0$ et posons $\alpha(D) \doteq \beta(P_1) \cap \beta(P_2)$.

Vérifions que α satisfait les hypothèses de la question 3.3 :

α bien définie : Si $D = P_1 \cap P_2 = P_1' \cap P_2'$ et si $\Delta \doteq \beta(P_1) \cap \beta(P_2)$, alors $P_1 \cap P_2 \cap P_i' = D \Rightarrow \beta(P_1) \cap \beta(P_2) \cap \beta(P_i') = \Delta \Rightarrow \beta(P_i') \supset \Delta \Rightarrow \beta(P_1') \cap \beta(P_2') = \Delta$ o

Si D_1, D_2, D_3 sont coplanaires, alors $\alpha(D_1), \alpha(D_2), \alpha(D_3)$ aussi :

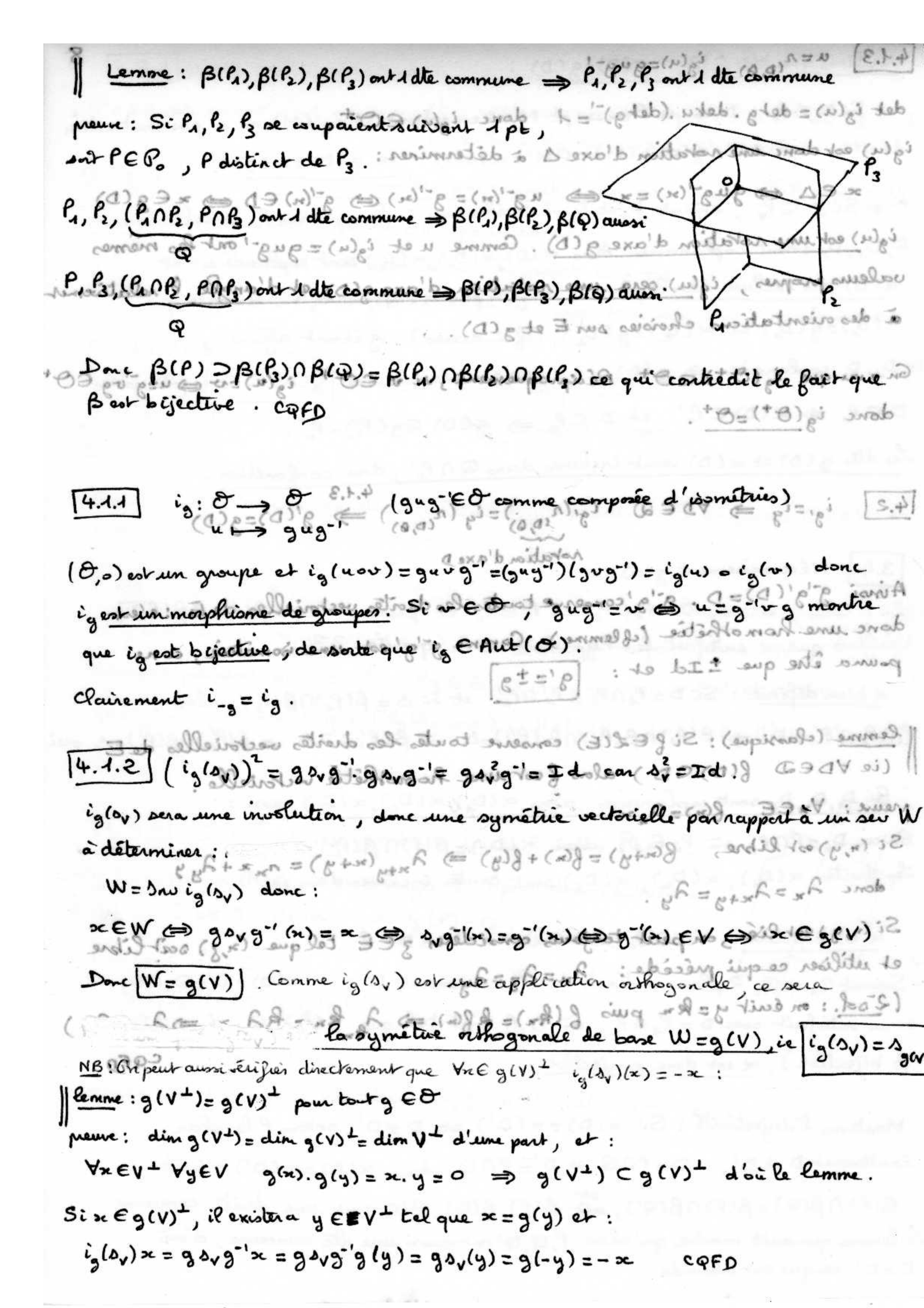
On a $D_i = P \cap P_i$ où $P_i \in \mathcal{P}_0$ d'où $\alpha(D_i) = \beta(P) \cap \beta(P_i)$

Les droites $\alpha(D_1), \alpha(D_2), \alpha(D_3)$ sont toutes incluses dans $\beta(P)$.

α est bijective : $\forall D' \in \mathcal{D}_0 \ \exists D \in \mathcal{D}_0 \quad \alpha(D) = D'$?

Soient Q_1 et Q_2 2 plans distincts de $\mathcal{P}_0'$ contenant D' : $\alpha(D) = D' = Q_1 \cap Q_2$ sera satisfait avec $D = P_1 \cap P_2$, où P_1, P_2 sont tels que $\beta(P_i) = Q_i$ (possible car β bijective). α est donc surjective.

Montrons l'injectivité : Si $\alpha(D) = \alpha(D')$ et $D \neq D'$, notons P le plan contenant D et D'. $D = P \cap Q$ et $D' = P \cap Q'$ donc $\alpha(D) = \alpha(D')$ s'écrit $\beta(P) \cap \beta(Q) = \beta(P) \cap \beta(Q')$, ~~soit~~ et $\beta(P), \beta(Q), \beta(Q')$ ont une droite commune. Le lemme qui suit montre qu'alors P, Q, Q' ont aussi une dte commune, d'où $D = D'$ ce qui est absurde.



Lemme : $\beta(P_1), \beta(P_2), \beta(P_3)$ ont 1 dte commune $\Rightarrow P_1, P_2, P_3$ ont 1 dte commune

preuve : Si P_1, P_2, P_3 se coupaient suivant 1 pt, soit $P \in \mathcal{P}_0$, P distinct de P_3.

$P_1, P_2, \underbrace{(P_1 \cap P_2, P \cap P_3)}_{Q}$ ont 1 dte commune $\Rightarrow \beta(P_1), \beta(P_2), \beta(Q)$ aussi

$P, P_3, \underbrace{(P_1 \cap P_2, P \cap P_3)}_{Q}$ ont 1 dte commune $\Rightarrow \beta(P), \beta(P_3), \beta(Q)$ aussi

Donc $\beta(P) \supset \beta(P_3) \cap \beta(Q) = \beta(P_1) \cap \beta(P_2) \cap \beta(P_3)$ ce qui contredit le fait que β est bijective. CQFD

4.1.1 $i_g : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$, $u \mapsto gug^{-1}$ ($gug^{-1} \in \mathcal{O}$ comme composée d'isométries)

$(\mathcal{O}, \circ)$ est un groupe et $i_g(u \circ v) = guvg^{-1} = (gug^{-1})(gvg^{-1}) = i_g(u) \circ i_g(v)$ donc i_g est un morphisme de groupes. Si $v \in \mathcal{O}$, $gug^{-1} = v \Leftrightarrow u = g^{-1}vg$ montre que i_g est bijective, de sorte que $i_g \in Aut(\mathcal{O})$.

Clairement $i_{-g} = i_g$.

4.1.2 $(i_g(s_V))^2 = g s_V g^{-1} \cdot g s_V g^{-1} = g s_V^2 g^{-1} = Id$ car $s_V^2 = Id$.

$i_g(s_V)$ sera une involution, donc une symétrie vectorielle par rapport à un sev W à déterminer :

$W = Inv\, i_g(s_V)$ donc :

$x \in W \Leftrightarrow g s_V g^{-1}(x) = x \Leftrightarrow s_V g^{-1}(x) = g^{-1}(x) \Leftrightarrow g^{-1}(x) \in V \Leftrightarrow x \in g(V)$

Donc $\boxed{W = g(V)}$. Comme $i_g(s_V)$ est une application orthogonale, ce sera la symétrie orthogonale de base $W = g(V)$, ie $\boxed{i_g(s_V) = s_{g(V)}}$

NB : On peut aussi vérifier directement que $\forall x \in g(V)^\perp \quad i_g(s_V)(x) = -x$:

lemme : $g(V^\perp) = g(V)^\perp$ pour tout $g \in \mathcal{O}$

preuve : $\dim g(V^\perp) = \dim g(V)^\perp = \dim V^\perp$ d'une part, et :

$\forall x \in V^\perp \ \forall y \in V \quad g(x).g(y) = x.y = 0 \Rightarrow g(V^\perp) \subset g(V)^\perp$ d'où le lemme.

Si $x \in g(V)^\perp$, il existera $y \in V^\perp$ tel que $x = g(y)$ et :

$i_g(s_V)x = g s_V g^{-1} x = g s_V g^{-1} g(y) = g s_V(y) = g(-y) = -x$ CQFD

4.1.3 $u = r_{(D,\theta)}$ $\quad i_g(u) = gug^{-1}$

$\det i_g(u) = \det g \cdot \det u \cdot (\det g)^{-1} = 1$ donc $i_g(u) \in \mathcal{O}^+$.

$i_g(u)$ est donc une rotation d'axe Δ à déterminer :

$$x \in \Delta \iff gug^{-1}(x) = x \iff ug^{-1}(x) = g^{-1}(x) \iff g^{-1}(x) \in D \iff x \in g(D)$$

$i_g(u)$ est une rotation d'axe $g(D)$. Comme u et $i_g(u) = gug^{-1}$ ont les mêmes valeurs propres, $i_g(u)$ sera une rotation d'axe $g(D)$ et d'angle θ relativement à des orientations choisies sur E et $g(D)$.

On a vu que $i_g(\mathcal{O}^+) \subset \mathcal{O}^+$. Réciproquement, si $v \in \mathcal{O}^+$ $\quad i_g(u) = v \iff u = g^{-1}vg \in \mathcal{O}^+$

donc $i_g(\mathcal{O}^+) = \mathcal{O}^+$.

4.2 $i_{g'} = i_g \Rightarrow \forall D \in \mathcal{D} \quad i_{g'}(\underbrace{r_{(D,\theta)}}_{\text{rotation d'axe } D}) = i_g(r_{(D,\theta)}) \overset{4.1.3}{\Rightarrow} g'(D) = g(D)$

Ainsi $g^{-1}g'(D) = D$. $g^{-1}g'$ conserve toutes les droites vectorielles de E : c'est donc une homothétie (cf lemme). Comme $g^{-1}g'$ est une isométrie, ce ne pourra être que $\pm Id$ et : $\boxed{g' = \pm g}$

lemme (classique) : Si $f \in \mathcal{L}(E)$ conserve toutes les droites vectorielles de E (ie $\forall D \in \mathcal{D}$ $\; f(D) \subset D$) alors f est une homothétie vectorielle.

preuve : $\forall x \in E \quad f(x) = \lambda_x x$

Si (x,y) est libre, $\quad f(x+y) = f(x) + f(y) \Rightarrow \lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_x x + \lambda_y y$

donc $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$.

Si (x,y) est lié, on peut toujours considérer $z \in E$ tel que (x,z) soit libre et utiliser ce qui précède : $\lambda_x = \lambda_z = \lambda_y$.

(2e sol. : on écrit $y = kx$ puis $f(kx) = kf(x) \Rightarrow \lambda_{kx} kx = k\lambda_x x \Rightarrow \lambda_{kx} = \lambda_x$)

CQFD

4.3.1

$u^2 = Id \iff u$ involutive $\iff u$ symétrie vect. par rapport à V parall. à W où $V \oplus W = E$
(d'ailleurs $V = \mathrm{Ker}(u - Id)$ et $W = \mathrm{Ker}(u + Id)$)

Il suffit de savoir qu'une symétrie par rapport à un sev V parallèlement à W est une isométrie vect. ssi $W = V^\perp$ (*) pour conclure :

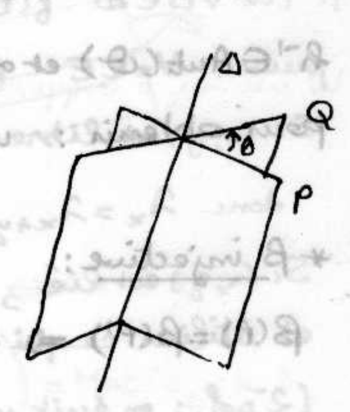
> L'ensemble des appl. orthogonales u vérifiant $u^2 = Id$ est l'ensemble des symétries vectorielles orthogonales par rapport à un sev V quelconque.

Si $\dim V = 3$, $u = Id$
Si $\dim V = 2$, $u = s_V$ est une symétrie hyperplane
Si $\dim V = 1$, $u = r_D$ est un retournement d'axe D
Si $\dim V = 0$, $u = -Id$

On sait que l'ensemble des symétries hyperplanes de E engendre $O(E)$. C'est le sous-ensemble cherché.

NB : Montrons (*) pour finir : Soit s la symétrie $/_{\grave{a}} V \parallel_{\grave{a}} W$. Si $s \in O$, $x \in V$ et $y \in W$ on a : $x.y = s(x).s(y) = x.(-y) \Rightarrow x.y = 0$ donc $W = V^\perp$.
Réciproquement si $W = V^\perp$, $\forall z \in E$ $z = v + w$ où $v \in V$ et $w \in W$, et $s(z) = v - w$ montre que (Pythagore) : $\|s(z)\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 = \|z\|^2$.
Donc $s \in O(E)$.

4.3.2 Soit $\Delta = P \cap Q$ et θ l'angle des 2 plans P et Q.



Soit g la rotation d'axe Δ et d'angle θ (pour des orientations fixées de E et Δ) de sorte que $g(P) = Q$.

Pour tout $x \in Q$:

$$\underbrace{g s_P g^{-1}}_{\in O^-}(x) = g s_P(y) = g(y) = x$$
où $y = g^{-1}(x) \in P$

montre que l'isométrie négative $g s_P g^{-1}$ n'est autre que s_Q.

4.3.3 $h \in Aut(\Theta)$ est fixé.

A prouver :
$\forall P \in \mathcal{P} \quad h(s_P) = s_{\beta(P)}$ où $\beta(P) \in \mathcal{P}$, et $\beta : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ bijective.

* $h(s_P)^2 = h(s_P^2) = h(Id) = Id$ donc $h(s_P)$ est une isométrie vérifiant $u^2 = Id$.
Le 4.3.1 montre que $h(s_P)$ est une symétrie orth. /$_{\bar{a}}$ $V = Ker(h(s_P) - Id)$. Il s'agit de prouver que V est un plan.

$h(s_P) \neq \pm Id$ (sinon $s_P = \pm Id$).

Si $h(s_P)$ était un retournement d'axe D, pour tout plan Q on aurait :

$$\exists g \in \Theta^+ \quad s_Q = g s_P g^{-1}$$

d'où

$$h(s_Q) = h(g) \underbrace{h(s_P)}_{\text{rotation d'axe } D} h(g)^{-1} \overset{4.1.3}{=} \underbrace{s_{h(g)(D)}}_{\text{rotation d'axe } h(g)(D)} \in \Theta^+$$

Les s_Q, $Q \in \mathcal{P}$, engendrent Θ, de sorte que l'on aurait $h(\Theta) \subset \Theta^+$ ce qui contredit le caractère bijectif de h.

Ccl : $h(s_P) = s_{\beta(P)}$ où $\beta(P) \in \mathcal{P}$.

* β surjective :
$\forall Q \in \mathcal{P} \ \exists u \in \Theta \quad h(u) = s_Q$ en fait $u = h^{-1}(s_Q)$

$h^{-1} \in Aut(\Theta)$ et on peut utiliser le paragraphe ci-dessus avec h^{-1} au lieu de h, pour obtenir : $u = s_P$ où $P \in \mathcal{P}$.

* β injective :

$\beta(P) = \beta(P') \Rightarrow h(s_P) = h(s_{P'}) \Rightarrow s_P = s_{P'} \Rightarrow P = P'$ oui

4.4 Les symétries hyperplanes engendrent $\mathcal{O}$, donc toute isométrie positive u s'écrira comme produit d'un nbre pair de symétries planes s_{P_i} :

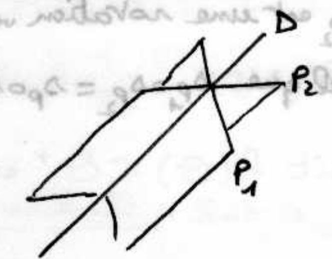
$$\forall u \in \mathcal{O}^+ \quad u = s_{P_1} \circ \dots \circ s_{P_{2k}}$$

d'où $h(u) = h(s_{P_1}) \circ \dots \circ h(s_{P_{2k}}) = s_{\beta(P_1)} \circ \dots \circ s_{\beta(P_{2k})} \in \mathcal{O}^+$ comme composée d'un nbre pair de sym. hyp.

Réciproquement si $v \in \mathcal{O}^+$, il existe $u \in \mathcal{O}$ tel que $h(u) = v$ et u s'écrit : $u = s_{P_1} \circ \dots \circ s_{P_k}$. De $v = h(s_{P_1}) \circ \dots \circ h(s_{P_k}) = s_{\beta(P_1)} \circ \dots \circ s_{\beta(P_k)} \in \mathcal{O}^+$ on déduit que k est pair d'où $u \in \mathcal{O}^+$.

Ccl : $\boxed{h(\mathcal{O}^+) = \mathcal{O}^+}$

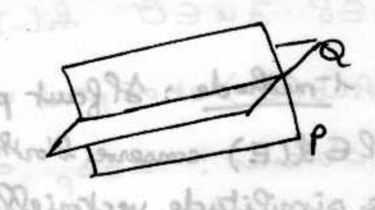
* Déterminons $h(s_D)$: $s_D = s_{P_1} \circ s_{P_2}$ où P_1, P_2 sont 2 plans perpendiculaires contenant D.



$h(s_D) = h(s_{P_1}) \circ h(s_{P_2}) = s_{\beta(P_1)} \circ s_{\beta(P_2)}$ sera donc une rotation vect. d'axe $\beta(P_1) \cap \beta(P_2)$, et d'angle π puisque $h(s_D)^2 = h(s_D^2) = h(Id) = Id$.

4.5.1 | P et Q sont perpendiculaires ssi $s_P \circ s_Q = s_D$ est le retournement d'axe $D = P \cap Q$

($\Rightarrow$) Soit $e = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée adaptée
ie (e_1, e_2) base de P
(e_2, e_3) base de Q
e_2 vect. dir. de $D = P \cap Q$



Alors : $Mat(s_P ; e) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$ $\quad Mat(s_Q ; e) = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

de sorte que $Mat(s_P \circ s_Q ; e) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} = Mat(s_D ; e)$

($\Leftarrow$) Si $s_P \circ s_Q = s_D$ où $D = P \cap Q$, on a :

$$\forall x \in Q^\perp \quad s_P \circ \underbrace{s_Q(x)}_{-x} = \underbrace{s_D(x)}_{-x} \quad \text{d'où } s_P(x) = x \Leftrightarrow x \in P$$

On a prouvé que $Q^\perp \subset P$ ie P et Q sont perpendiculaires.

CQFD

4.5.2 — notation abusive ! X

* Si $P \textcircled{\perp} Q$, alors $s_P \circ s_Q = s_D$ où $D = P \cap Q$ d'après 4.5.1

D'où $h(s_P \circ s_Q) = h(s_D) \iff s_{\beta(P)} \circ s_{\beta(Q)} = s_{\beta(P) \cap \beta(Q)}$ (cf 4.4)

En utilisant 4.5.1, on conclut : $\beta(P) \perp \beta(Q)$.

Réciproquement si $\beta(P) \perp \beta(Q)$ alors $s_{\beta(P)\cap\beta(Q)} = s_{\beta(P)} \circ s_{\beta(Q)} = h(s_P \circ s_Q)$ d'où $s_P \circ s_Q = h^{-1}(s_{\beta(P)\cap\beta(Q)}) \Rightarrow (s_P \circ s_Q)^2 = Id \Rightarrow s_P \circ s_Q = s_{P\cap Q}$ ($s_P \circ s_Q$ est une rotation d'axe $P \cap Q$, et $(s_P \circ s_Q)^2 = Id$ montre que son angle est π) d'où $P \perp Q$

<u>Ccl</u> : $\boxed{P \perp Q \iff \beta(P) \perp \beta(Q)}$

* Si P_1, P_2, P_3 sont 3 plans contenant la droite D, $s_{P_1} \circ s_{P_2}$ est une rotation vect. d'axe $P_1 \cap P_2 = D$, donc il existera un plan P contenant D tel que $s_{P_1} \circ s_{P_2} = s_P \circ s_{P_3}$.
de sorte que :

$$s_{P_1} \circ s_{P_2} \circ s_{P_3} = s_P \circ s_{P_3} \circ s_{P_3} = s_P$$

$$s_{\beta(P_1)} \circ s_{\beta(P_2)} \circ s_{\beta(P_3)} = s_{\beta(P)}$$

$$s_{\beta(P_2)} \circ s_{\beta(P_3)} = s_{\beta(P_1)} \circ s_{\beta(P)}$$

d'où $\boxed{\beta(P_2) \cap \beta(P_3) = \beta(P_1) \cap \beta(P)}$

Les 3 plans $\beta(P_1), \beta(P_2), \beta(P_3)$ auront donc 1 dte vectorielle en commun.

4.6 1re <u>méthode</u> : Il faut prouver que :

|| Si $l \in \mathcal{L}(E)$ conserve l'orthogonalité (ie $x.y = 0 \Rightarrow l(x).l(y) = 0$) alors l est une similitude vectorielle (ie s'écrit $l = kg$ où $g \in O$ et $k \in \mathbb{R}$)

Soit x fixé non nul.

$$E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad y \longmapsto x.y = f_1(y)$$

f_1 est une forme linéaire non nulle, de noyau $(\mathbb{R}x)^\perp$

$$E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad y \longmapsto l(x).l(y) = f_2(y)$$

f_2 est une forme linéaire et, par hypothèse $\operatorname{Ker} f_1 \subset \operatorname{Ker} f_2$. Si f_2 n'est pas nulle, on aura $\operatorname{Ker} f_1 = \operatorname{Ker} f_2$ d'où l'existence de $\lambda_x \in \mathbb{R}$ / $f_2(y) = \lambda_x f_1(y)$.
Si f_2 est nulle, on aura la m̂ égalité avec $\lambda_x = 0$. Ainsi :

$$\forall x \in E \quad \exists \lambda_x \quad l(x).l(y) = \lambda_x\, x.y$$

Montrons que λ_x est indépendant de x :

$\ell(kx).\ell(y) = \lambda_{kx}.kx.y = k\,\ell(x).\ell(y) = k\lambda_x x.y$ d'où $\lambda_{kx} = \lambda_x$.

Si x et x' sont lin. indépendants, $\ell(x+x').\ell(y) = \lambda_{x+x'}(x+x').y = \ell(x)\ell(y)+\ell(x').\ell(y)$

donc $\lambda_{x+x'}x.y + \lambda_{x+x'}x'.y = \lambda_x x.y + \lambda_{x'}x'.y$

$$\left[(\lambda_{x+x'}-\lambda_x)x + (\lambda_{x+x'}-\lambda_{x'})x'\right].y = 0$$

pour tout $y\in E$. On en déduit $(\lambda_{x+x'}-\lambda_x)x + (\lambda_{x+x'}-\lambda_{x'}).x' = 0$ d'où, puisque (x,x') est libre, $\lambda_{x+x'} = \lambda_x = \lambda_{x'}$

<u>Ccl</u> : $\exists\lambda\in\mathbb{R}\quad \forall x,y\in E\quad \ell(x).\ell(y) = \lambda x.y$

Si $y=x$, on voit que $\lambda\geq 0$, puis : $\forall x\in E\quad \|\ell(x)\| = \sqrt{\lambda}\,\|x\|$

De $\left\|\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\ell(x)\right\| = \|x\|$ on déduit que $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\ell(x) = g(x)\in\mathcal{O}$ d'où $\ell(x) = \sqrt{\lambda}.g(x)$

CQFD

<u>2-méthode</u> : Soit (e_1,e_2,e_3) une base orthonormée de E.

$e_1.e_2 = e_2.e_3 = e_1.e_3 = 0 \Rightarrow \ell(e_1).\ell(e_2) = \ell(e_2)\ell(e_3) = \ell(e_1)\ell(e_3) = 0$ donc $(\ell(e_1),\ell(e_2),\ell(e_3))$ est un système orthogonal.

Si $i,j\in\mathbb{N}_3$, $i\neq j$ on a :

$(e_i+e_j)(e_i-e_j) = 0 \Rightarrow (\ell(e_i)+\ell(e_j))(\ell(e_i)-\ell(e_j)) = 0 \Rightarrow \|\ell(e_i)\| = \|\ell(e_j)\|$

Donc $\|\ell(e_1)\| = \|\ell(e_2)\| = \|\ell(e_3)\| = \lambda$.

Si $\lambda\neq 0$, ℓ est bijective et apparait comme la composée de l'homothétie de rapport λ et d'une isométrie vectorielle.

Si $\lambda = 0$, $\ell\equiv 0$.

4.7 β est bijective de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ et transforme 3 plans P_1,P_2,P_3 ayant une dte commune en 3 plans $\beta(P_1),\beta(P_2),\beta(P_3)$ ayant une dte commune (4.5.2), donc il existe g affine bijective de E dans E tel que $\beta(P) = g(P)\quad\forall P\in\mathcal{P}$ (3.

$g(0)=0$, donc g est linéaire. <u>De plus g conserve l'orthogonalité des vecteurs</u> car d'après 4.5.2 : $P\perp Q \Leftrightarrow \beta(P)\perp\beta(Q)$
perp. perp.

En effet, si D et D' sont 2 dtes orthogonales,

$D = P \cap Q$ où $P = (D, D')$, $Q \perp Q'$, $P \perp Q$ et $P \perp Q'$.

$D' = P \cap Q'$. (prendre $D = \mathbb{R}\vec{u}$, $D' = \mathbb{R}\vec{u}'$, $\Delta = \mathbb{R}(\vec{u} \wedge \vec{u}')$

$Q = (D, \Delta)$, $P = (D', \Delta)$)

d'où $g(D) = g(P \cap Q) = g(P) \cap g(Q) = \beta(P) \cap \beta(Q)$

$g(D') = \beta(P) \cap \beta(Q')$

avec $P \perp Q \Rightarrow \beta(P) \perp \beta(Q)$

$P \perp Q' \Rightarrow \beta(P) \perp \beta(Q')$

$Q \perp Q' \Rightarrow \beta(Q) \perp \beta(Q')$

Par suite $g(D)$ et $g(D')$ sont orthogonales (*)

g est linéaire et conserve l'orthogonalité des vecteurs, donc (4.6) :

$$g = k r \quad k \in \mathbb{R} \text{ et } r \in \mathcal{O}$$

On peut supposer que $r \in \mathcal{O}^+$. Alors :

$$h(s_P) = s_{kr(P)} = s_{r(P)} \quad \text{où } r \in \mathcal{O}^+$$
$$= i_r(s_P) \quad \text{d'après 4.1.2}$$

Les symétries planes s_P engendrent le groupe $\mathcal{O}$; donc $h(u) = r u r^{-1}$ pour tout $u \in \mathcal{O}$. Ccl : $\boxed{h = i_r}$

(*) : Résultat utilisé : Si $D = P \cap Q$ et $D' = P \cap Q'$ où $P = (D, D')$, $Q \perp Q'$, $P \perp Q$ et $P \perp Q'$ alors D et D' sont orthogonales. En effet :

$$\left. \begin{array}{l} Q \perp Q' \Leftrightarrow Q^\perp \subset Q' \\ Q \perp P \Leftrightarrow Q^\perp \subset P \end{array} \right\} \Rightarrow Q^\perp \subset Q' \cap P = D' \Rightarrow Q^\perp = D' \quad (\text{car } \dim Q^\perp = \dim D' = 1$$

Comme $D \subset Q$, on en déduit D orthogonale à D'. CQFD.

4.8 Si h est un automorphisme de $\mathcal{O}^+$, on peut l'étendre en un automorph-me $\tilde{h}$ de $\mathcal{O}$ en posant :

$$\tilde{h}(u) = \begin{cases} h(u) & si\ u \in \mathcal{O}^+ \\ -h(-u) & si\ u \in \mathcal{O}^- \end{cases}$$

En effet : Si $u \in \mathcal{O}^+$ et $v \in \mathcal{O}^-$, $\tilde{h}(uv) = -h(-uv)$

et $\tilde{h}(u)\tilde{h}(v) = h(u).(-h(-v)) = -h(-uv)$

Si $u, v \in \mathcal{O}^-$, $\tilde{h}(uv) = h(uv)$ et $\tilde{h}(u)\tilde{h}(v) = h(-u)h(-v) = h(uv)$

4.7 montre alors l'existence d'une rotation $r \in \mathcal{O}^+$ telle que $h = i_r$

Réciproquement, $i_r(\mathcal{O}^+) = \mathcal{O}^+$ d'après 4.1.3.

<u>Ccl</u> : Tous les automorphismes de $\mathcal{O}$ (resp. tous les automorphismes de $\mathcal{O}^+$) sont les automorphismes intérieurs $h = i_r$ où $r \in \mathcal{O}^+$, ie :

$\forall u \in \mathcal{O}$ (resp. $\mathcal{O}^+$) $\quad h(u) = r u r^{-1} \quad$ où $r \in \mathcal{O}^+$

CAPES externe 1980, composition 1

_ _

On adoptera dans tout le problème les définitions et notations suivantes :

- On notera $\mathbb{N}^\star$ l'ensemble des entiers naturels non nuls et on appellera « naturel » tout élément de $\mathbb{N}^\star$.
- On lira « supérieur à » (respectivement « inférieur à ») le signe $\geqslant$ (resp. $\leqslant$) et « strictement supérieur à » (resp. « strictement inférieur à ») le signe $>$ (resp. $<$).
- Le mot « suite » désignera toujours une suite réelle définie sur $\mathbb{N}^\star$ ou sur une partie infinie de $\mathbb{N}^\star$. Une suite définie sur une partie infinie X de $\mathbb{N}^\star$ sera notée $(u_n)_{n\in X}$. Une suite définie sur tout $\mathbb{N}^\star$ sera notée par simplification (u_n).
- Si une suite admet une limite réelle (respectivement « admet pour limite un réel ℓ ») on dira qu'elle converge (resp. « qu'elle converge vers ℓ »).
- Une suite (u_n) sera dite convergente en moyenne (respectivement « convergente en moyenne vers ℓ ») si la suite (S_n) définie par $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ est convergente (resp. « converge vers ℓ).

L'objet du problème est d'étudier la convergence en moyenne de certaines suites.

Aucun des résultats acquis dans l'une des parties I, II, II, IV n'est indispensable à la résolution des autres parties. Cependant, les candidats sont invités à étudier aussi complètement que possible l'introduction et les parties I et II.

Introduction.

• *On note* $\log x$ *le logarithme népérien du nombre réel strictement positif* x.

0.1 Démontrer que, pour tout entier naturel k, $\quad \dfrac{1}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}$.

0.2 En déduire que pour tout entier naturel n,

$$\log(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \log n.$$

0.3 Déterminer alors

i) la nature le la série de terme général $\dfrac{1}{n}$;

ii) la nature de la suite $\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)$.

Partie I.

On dit que deux suites (α_n) et (β_n) sont équivalentes s'il existe une suite (ϵ_n) convergeant vers 0 et un naturel N tel que, pour tout entier naturel n supérieur à N, on ait $\alpha_n = \beta_n(1+\epsilon_n)$. On écrit $\alpha_n \sim \beta_n$.

1.1 a) On considère une suite (a_n) convergeant vers zéro. Démontrer que pour tout nombre ϵ strictement positif, il existe un naturel p tel que pour tout entier n supérieur à p on ait

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

b) En déduire que la suite (a_n) converge en moyenne vers zéro.

1.2 Soit (b_n) une suite convergeant vers b. Démontrer que la suite (b_n) converge en moyenne vers b.

1.3 La suite (μ_n) définie par $\mu_n = (-1)^n$ est-elle convergente ?
Est-elle convergente en moyenne ? Qu'en déduit-on ?

1.4 a) Soit (c_n) une suite. On suppose que la suite (δ_n) définie par $\delta_n = c_{n+1} - c_n$ converge vers c. Démontrer en utilisant ce qui précède que la suite $\left(\dfrac{c_n}{n}\right)$ converge aussi vers c.

b) On considère la suite (u_n) définie par les conditions $u_1 = \dfrac{\pi}{2}$ et, pour tout naturel n, $u_{n+1} = \sin u_n$.

(i) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et convergente. Quelle est sa limite ?

(ii) Déterminer un nombre réel r strictement négatif tel que la suite (v_n) définie par $v_n = u_{n+1}^r - u_n^r$ converge vers une limite non nulle ℓ.
On pourra utiliser un développement limité au voisinage de zéro de la fonction sinus.

(iii) En déduire que :

$$u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}.$$

Partie II.

– Si A est un ensemble fini, son cardinal est noté Card A.
– On note sup B la borne supérieure d'une partie H, non vide et majorée de $\mathbb{R}$.

2.1 Soit E une partie de $\mathbb{N}^*$. Démontrer que la suite λ_n définie par $\lambda_n = 1$ si n appartient E et $\lambda_n = 0$ si n n'appartient pas à E converge en moyenne vers 0 si et seulement si :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\mathrm{Card}\,(\mathrm{E} \cap \{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}) = 0. \qquad (*)$$

– On dit par définition qu'une partie E de $\mathbb{N}^*$ est densité nulle si elle vérifie la condition (*).

2.2 a) Démontrer que l'ensemble des naturels qui sont les carrés d'un autre naturel est de densité nulle.

b) Démontrer que la réunion de deux ensemble de densité nulle est un ensemble de densité nulle.

2.3 On dit qu'une suite (u_n) vérifie la propriété $\mathscr{P}$ s'il existe un nombre réel Λ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |u_k - \Lambda| = 0. \qquad (\mathscr{P})$$

Démontrer que si une suite (u_n) vérifie la propriété $\mathscr{P}$, elle converge en moyenne vers Λ. La réciproque est-elle vraie ?

2.4 Dans cette question, (u_n) est une suite bornée, et E une partie de $\mathbb{N}^\star$ de densité nulle dont le complémentaire dans $\mathbb{N}^\star$ est noté $\mathbb{N}^s tar - \{\mathrm{E}\}$. On suppose de plus que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star - \{\mathrm{E}\}}$ converge vers Λ. Démontrer que la suite (v_n) définie par $v_n = |u_n - \Lambda|$ converge en moyenne vers zéro.

2.5 Dans cette partie, (u_n) est une suite bornée non nulle, et la suite (v_n) définie par $v_n = |u_n|$ converge en moyenne vers zéro.

2.5.a Pour tout entier naturel n, on note

$$B_n = \left\{ S_p,\ S_p = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} |u_k|,\ p \geqslant n \right\}.$$

Démontrer l'existence du nombre réel $\alpha_n = \sup B_n$.

2.5.b Démontrer que la suite $(\alpha)_n$ décroît et converge. Quelle est sa limite ?

2.5.c On appelle E l'ensemble des naturels p tels que $u_p^2 \geqslant \alpha_p$.

Établir pour tout naturel n l'inégalité :

$$\mathrm{Card}\,(\mathrm{E} \cap \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{|u_k|}{\sqrt{\alpha_k}}.$$

En déduire que l'ensemble E est de densité nulle.

2.5.d Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}-E}$ converge vers zéro.

2.6 **2.6.a** Déduire de ce qui précède une condition nécessaire et suffisante pour une suite bornée vérifie la propriété $\mathscr{P}$.

2.6.b Démontrer que si deux suites (u_n) et (u'_n) bornées vérifient la propriété $\mathscr{P}$, il en est de même de la suite $(u_n \times u'_n)$.

Partie III.

- On désigne par (p_n) la suite des entiers naturels premiers $(p_1 = 2,\ p_2 = 2,\ p_3 = 5, \dots)$.
- Pour tout nombre réel x, on note $\mathrm{E}(x)$ la partie entière de x. $\mathrm{E}(x)$ est l'unique entier relatif $\overline{x}$ tel que $\overline{x} \leqslant x < \overline{x}+1$.
- Pour tout couple $(r,\ k)$ de naturels et pour toute application Φ définie par

$$\Phi\ :\ \begin{cases}\{1,\ 2,\ \dots,\ r\}^k \longrightarrow \mathbb{R}\\ (i_1,\ i_2,\dots,\ i_k) \longmapsto a_{i_1 i_2 \dots i_k}\end{cases}$$

on note $\displaystyle\sum_{1\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant\cdots\leqslant i_k\leqslant r} a_{i_1 i_2\dots i_k}$ la somme des images par Φ de tous les éléments $(i_1,\ i_2,\dots,\ i_k)$ vérifiant $1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_k \leqslant r$.
- On admettra le théorème suivant :

Théorème admis.

Si r est un entier naturel et $\Omega_1,\ \Omega_2,\ \dots,\ \Omega_r$, r parties finies d'un ensemble A,

$$\mathrm{Card}\,(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \cdots \cup \Omega_r) = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k+1} \left(\sum_{1\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant\cdots\leqslant i_k\leqslant r} \mathrm{Card}\left(\Omega_{i_1} \cap \Omega_{i_2} \cap \cdots \cap \Omega_{i_k}\right)\right).$$

3.1. **3.1.a.** Démontrer que pour tout couple $(i,\ k)$ de naturels

$$\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)^{-1} > 1 + \sum_{q=1}^{k} \frac{1}{(p_i)^q}.$$

3.1.b. On considère la suite (β_n) définie par $\beta_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)^{-1}$.

Démontrer que, pour tout entier naturel N, il existe un naturel n_0 tel que pour tout entier naturel n supérieur à n_0 on ait $\beta_n \geqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$.

3.1.c. Déduire de ce qui précède que la série de terme général $\dfrac{1}{p_n}$ est divergente.

3.2. Dans cette question x est un nombre réel supérieur ou égal à 2 et r un entier naturel.

- On appelle : $\pi(x)$ le nombre d'entiers naturels premiers inférieurs à x.
- $\omega(x,\ r)$ le cardinal des l'ensemble $\mathrm{D}(x,\ r)$ des naturels y vérifiant

  (i) $y \leqslant x$

  (ii) y n'est divisible par aucun des r naturels $p_1,\ p_2,\dots,\ p_r$.

3.2.a. Démontrer que $\pi(x) \leqslant r + \omega(x,\ r)$.

3.2.b. Si $p_{i_1},\ p_{i_2},\ \dots, p_{i_k}$ sont k naturels premiers distincts, exprimer en fonction de ceux-ci et de x le nombre de naturels m inférieurs à x et divisibles à la fois par $p_{i_1},\ p_{i_2},\ \dots$ et p_{i_k}.

3.2.c. Établir la relation

$$\omega(x,\ r) = \mathrm{E}(x) - \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k+1} \left(\sum_{1\leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant r} \mathrm{E}\left(\frac{x}{\prod_{s=1}^{k} p_{i_s}}\right)\right).$$

En déduire que

$$\omega(x,\ r) = \frac{x}{\beta_r} + 2^r.$$

3.2.d. Démontrer que l'ensemble des entiers naturels premiers est de densité nulle.

Partie IV.

– On appelle polynôme trigonométrique P toute application numérique de variable réelle définie par les $2p+1$ nombres $a_0, a_1, \ldots, a_p, b_1, b_2, \ldots, b_p$ et telle que pour tout nombre réel x

$$P(x) = a_0 + \sum_{q=1}^{p} (a_q \cos 2\pi q x + b_q \sin 2\pi q x).$$

– On admettra le théorème suivant :

Théorème admis.

Pour toute fonction numérique f définie et intégrable au sens de Riemann sur l'intervalle $[0\,;1]$ et pour tout nombre réel ϵ strictement positif, il existe deux polynômes trigonométriques P et Q tels que

(i) pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\,;1]$, $P(x) \leqslant f(x) \leqslant Q(x)$,

(ii) $\displaystyle\int_0^1 (Q(x) - P(x))\,\mathrm{d}x \leqslant \epsilon.$

4.1 Théorème préliminaire.

Démontrer que pour tou nombre réel y et tout naturel n

$$\sin\frac{y}{2}\left(\sum_{k=0}^{m} \cos ky\right) = \sin\frac{m+1}{2}y.\cos\frac{m}{2}y$$

$$\sin\frac{y}{2}\left(\sum_{k=0}^{m} \sin ky\right) = \sin\frac{m+1}{2}y.\sin\frac{m}{2}y.$$

4.2 θ désigne un nombre réel irrationnel. A tout naturel k on fait correspondre le nombre réel x_k défini par

$$x_k = k\theta - \mathrm{E}(k\theta).$$

4.2.a. Montrer que, pour tout naturel k, $0 < x_k < 1$ et que, si k et k' sont deux réels distincts x_k et différent de x'_k.

4.2.b. Soit P un polynôme trigonométrique ; démontrer que la suite $(P(x_k))$ converge en moyenne.

Comparer $\displaystyle\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x$ et la limite de la suite (S_n) définie par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(x_k)$.

4.2.c. Soit f une application numérique définie et intégrable au sens de Riemann sur $[0\,;1]$, démontrer que la suite $(f(x_n))$ converge en moyenne.

4.2.d En appliquant à une fonction en escalier bien choisie, démontrer que l'ensemble des nombres x_k définis en est dense dans $[0\,;1]$.

4.3 Application.

– On notera $\log_{10} 2$ le logarithme en base 10 de 2.
– A tout naturel n, on fait correspondre a_n, premier chiffre de l'écriture de 2^n en base 10 ($2^n = \overline{a_n\ldots\ldots}_{10}$)
– Pour tout entier naturel k inférieur à 9 et tout entier naturel n, on désigne par $B_{n,\,k}$ l'ensemble des entiers p inférieurs à n et tels que $a_p = k$.

4.3.a. Démontrer que $\log_{10} 2$ est un nombre irrationnel.

4.3.b. Démontrer que la suite (γ_n) définie par $\gamma_n = \dfrac{1}{n}\mathrm{Card}B_{n,\,k}$ converge vers un réel m_k que l'on exprimera en fonction de k.

4.3.c. Comparer m_k et $\dfrac{1}{100}\mathrm{Card}B_{100,\,k}$ pour les valeurs de k comprises entre 1 et 9.



SESSION DE 1980

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 5 heures

$\mathbb{Z}$ est l'anneau des entiers relatifs, $\mathbb{R}$ est le corps des nombres réels et $\mathbb{C}$ celui des nombres complexes.

P est un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé d'origine O. On utilisera la bijection de P sur $\mathbb{C}$ définie par M de coordonnées $(x, y) \longrightarrow x + iy$. On note $M(z)$ le point de P qui a pour affixe z. I est le point de coordonnées $(1, 0)$.

n est un entier naturel non nul.

On appelle « n-point » de P toute famille $(M_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de points de P vérifiant : $\forall k \in \mathbb{Z}$, $M_{k+n} = M_k$. Un tel n-point est noté $(M_1, \ldots, M_n)$, ou $\mathfrak{M}$ s'il n'y a pas ambiguïté.

On appelle « côté d'un n-point » le segment joignant deux points consécutifs M_k et M_{k+1}. On dira qu'un n-point est réduit à un point si : $\forall k \in \mathbb{Z}$, $M_k = M_1$.

On dit que deux n-points $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont équivalents s'il existe un entier h tel que : $\forall k \in \mathbb{Z}$, $M_{k+h} = N_k$. Les classes d'équivalence sont appelées des « n-gones ».

Les seules similitudes envisagées dans le problème sont des *similitudes directes*. Deux n-points $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont dits semblables s'il existe une similitude H telle que : $\forall k \in \mathbb{Z}$, $H(M_k) = N_k$. Deux n-gones sont semblables s'ils admettent des représentants semblables.

$\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$ est la racine n-ième de 1 dans $\mathbb{C}$ d'argument $\frac{2\pi}{n}$. Pour $p \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, on appelle Ω_p le n-point $(W_k^p)_{k \in \mathbb{Z}}$ où W_k^p est le point d'affixe ω^{pk}. Un n-gone est dit régulier de « type ω^p » s'il est semblable à Ω_p ou s'il est réduit à un point.

A tout nombre complexe a, *différent de* 1, on associe une *transformation polygonale d'ordre n*, S_a, définie de la manière suivante : à tout n-point $\mathfrak{M} = (M_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ correspond le n-point $S_a(\mathfrak{M}) = \mathfrak{N} = (N_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ tel que, pour tout k, le 3-point (M_k, M_{k+1}, N_k) soit réduit à un point, ou semblable au 3-point (A, I, O). A est le point d'affixe a et I est le point d'affixe 1.

I

1.1. $\mathfrak{M} = (M_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ étant un n-point et $\mathfrak{N} = (N_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ son image par la transformation polygonale S_a, $S_a(\mathfrak{M}) = \mathfrak{N}$, on note z_k l'affixe de M_k et z'_k l'affixe de N_k. Montrer que l'on a :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \qquad z'_k = \frac{z_k - a z_{k+1}}{1 - a}.$$

1.2. a et b étant deux nombres complexes différents de 1, montrer que les deux transformations polygonales S_a et S_b commutent, c'est-à-dire que l'on a :

$$S_a \circ S_b = S_b \circ S_a.$$

1.3. Si $\mathfrak{M} = (M_1, \ldots, M_n)$ est un n-point, on appelle « centre de gravité de $\mathfrak{M}$ » l'isobarycentre des points $M_1, \ldots, M_n$. Montrer que le centre de gravité de $\mathfrak{N} = S_a(\mathfrak{M})$ est le même que celui de $\mathfrak{M}$.

Tournez la page S. V. P.

II

Dans toute cette partie n est fixé égal à 3.

Un 3-point régulier est dit « équilatéral ».

ω est noté $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$.

2.1. Soient $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M_3(z_3)$ trois points de P. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les nombres complexes z_1, z_2, z_3 pour que le 3-point (M_1, M_2, M_3) soit équilatéral de type $\omega = j$, puis pour qu'il soit équilatéral de type j^2.

2.2. On suppose que a n'est pas une racine cubique de l'unité; montrer que la transformation polygonale d'ordre 3, S_a, est une bijection de l'ensemble des 3-points sur lui-même et qu'elle induit une bijection de l'ensemble des 3-points équilatéraux sur lui-même.

2.3. Dans cette question, on prend $a = i$ et les trois points B, C, D d'affixes respectives 0, 4 et $4 + 2i$. Effectuer à la règle et au compas les constructions de similitude permettant de tracer l'image du 3-point (B, C, D) par S_i (on aura soin de faire apparaître clairement sur la figure les côtés du 3-point (B, C, D) et les côtés de son image par S_i).

2.4. Dans cette question, on prend a racine cubique de l'unité.

Montrer que l'image par S_a de tout 3-point est un 3-point équilatéral et préciser suivant les cas le type de ce 3-point équilatéral.

Montrer que l'image par S_a d'un 3-point équilatéral de type a^2 est un 3-point réduit à un point. Quel est ce point?

2.5. a est encore une racine cubique de l'unité et $\mathcal{N} = (N_1, N_2, N_3)$ est un 3-point équilatéral de type a. Montrer que pour tout point M_1 de P il existe $\mathcal{M} = (M_1, M_2, M_3)$ tel que $S_a(\mathcal{M}) = \mathcal{N}$. Décrire géométriquement la construction de M_2 et M_3 à partir de $\mathcal{N}$ et de M_1 ; faire la figure.

Construire l'image par S_j du 3-point (B, C, D) défini en 2.3. sur un nouveau dessin.

2.6. a est de nouveau un nombre complexe quelconque (mais différent de 1). Déterminer l'ensemble Γ des points M de P tels que l'image par S_a du 3-point (A, I, M) soit un 3-point formé de points alignés (c'est-à-dire qu'il existe une droite du plan contenant les trois points N_1, N_2 et N_3). Montrer que cet ensemble contient, si $a \neq 0$, les points $A_1(-1 - a)$, $A_2(a^2)$ et $A_3\left(\frac{1}{a}\right)$. Caractériser géométriquement cet ensemble à l'aide des points A_1, A_2 et A_3. Étudier le cas $a = 0$.

III

n est un entier non nul quelconque.

$(u_1, \ldots, u_n)$ étant un élément *non nul* de $\mathbb{C}^n$, on dit qu'un n-point $\mathcal{M}$ vérifie la relation U définie par $(u_1, \ldots, u_n)$ si les affixes z_k des points M_k de $\mathcal{M}$ vérifient :

$$u_1 z_1 + \ldots + u_n z_n = 0.$$

On dit que la relation U est *adaptée* si elle satisfait à la condition suivante : si $\mathcal{M}$ vérifie U et si $\mathcal{M}'$ est semblable à $\mathcal{M}$, alors $\mathcal{M}'$ vérifie U.

On dit que la relation U est *polygonale d'ordre n* si à la fois :

(*i*) Elle est adaptée;

(*ii*) Elle est telle que si un n-point vérifie la relation U, tout n-point équivalent vérifie aussi la relation U.

3.1. Montrer que la relation U définie par $(u_1, \ldots, u_n)$ est adaptée si, et seulement si, $u_1 + \ldots + u_n = 0$.

3.2. Montrer que la relation U définie par $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est polygonale si, et seulement si, il existe un entier p et un nombre complexe λ non nul tels que :

$$1 \leqslant p \leqslant n-1 \qquad \text{et} \qquad \forall k \in \{1, \ldots, n\}, \; \alpha_k = \lambda\, \omega^{p(k-1)}.$$

Montrer que dans ce cas un n–point vérifie la relation U si, et seulement si, il vérifie la relation U_p définie par $(1, \omega^p, \omega^{2p}, \ldots, \omega^{(n-1)p})$.

Déterminer les relations polygonales d'ordre 2, 3 ou 4 et décrire les propriétés géométriques qu'elles traduisent pour un 2–point, un 3–point ou un 4–point.

3.3. Montrer qu'un n–point qui satisfait aux $n-1$ relations U_p, $1 \leqslant p \leqslant n-1$, définies en 3.2. est réduit à un point.

3.4. k étant un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$, montrer qu'un n–point qui satisfait à toutes les relations U_p sauf à la relation U_k est un n–point régulier de type ω^{n-k}.

IV

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

4.1. Montrer que S_a est une bijection de l'ensemble des n–points sur lui-même si $a^n \neq 1$.

Dans les questions qui suivent, p est un entier tel que : $1 \leqslant p \leqslant n-1$.

4.2. Montrer que si un n–point satisfait à la relation U_p (définie en 3.2.) son image par la transformation polygonale d'ordre n, S_a, vérifie aussi cette relation.

4.3. Montrer que pour tout n–point $\mathcal{M}$, le n–point $S_{\omega^p}(\mathcal{M})$ vérifie la relation U_p.

On donne un n–point $\mathcal{N}$ vérifiant la relation U_p. Montrer qu'il existe un n–point $\mathcal{M}$ tel que $S_{\omega^p}(\mathcal{M}) = \mathcal{N}$.

4.4. Montrer que si $a \neq \omega^p$, et si un n–point $\mathcal{M}$ ne vérifie pas la relation U_p alors le n–point $S_a(\mathcal{M})$ ne vérifie pas non plus la relation U_p.

4.5. Faire une étude complète de la transformation polygonale d'ordre n, S_{-1}.

4.6. On considère les $n-1$ transformations polygonales d'ordre n : $S_\omega, S_{\omega^2}, \ldots, S_{\omega^{n-1}}$. Montrer que l'image de tout n–point par la composée de ces $n-1$ transformations est réduite à un point. Montrer que l'image de tout n–point par la composée de $n-2$ transformations polygonales distinctes choisies parmi celles-ci est un n–point régulier dont on précisera le type.

V

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

p est un entier naturel vérifiant $1 \leqslant p \leqslant n$.

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont des réels vérifiant les deux propriétés suivantes :

$$\alpha_1 \neq 0$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p = 1$$

$T(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ désigne l'application de l'ensemble des n–points dans lui-même qui transforme le n–point $\mathcal{M} = (M_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ en le n–point $\mathcal{N} = (N_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de telle façon que :

pour tout k le point N_k est le barycentre de la famille de points $(M_k, \ldots, M_{k+p-1})$ affectés respectivement des coefficients $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$.

Tournez la page S. V. P.

5.1. Si $p = 2$, montrer que toute application $T(\alpha_1, \alpha_2)$ est une transformation polygonale d'ordre n que l'on précisera.

5.2. Si $p = 3$, montrer que l'application $T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ est la composée des deux transformations polygonales S_a et S_b où a et b désignent les racines (éventuellement confondues) du trinôme $\alpha_1 X^2 + \alpha_2 X + \alpha_3$.

En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que l'application $T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ soit une bijection de l'ensemble des n-points sur lui-même.

Pour quelles valeurs de n l'application $T\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ est-elle bijective? Lorsqu'elle n'est pas bijective, caractériser les n-points appartenant à son image.

5.3. Si p est quelconque, $2 \leqslant p \leqslant n$, et sachant que le polynôme $P(X) = \alpha_1 X^{p-1} + \alpha_2 X^{p-2} + \ldots + \alpha_p$ est factorisé par la formule $P(X) = \alpha_1 (X - a_1) \ldots (X - a_{p-1})$, $(a_1, \ldots, a_{p-1}) \in \mathbb{C}^{p-1}$, démontrer que :

$$T(\alpha_1, \ldots \alpha_p) = S_{a_1} \circ S_{a_2} \circ \ldots \circ S_{a_{p-1}}.$$

Discuter du caractère bijectif ou non de $T(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ et plus particulièrement du caractère bijectif de $T\left(\frac{1}{p}, \ldots, \frac{1}{p}\right)$.